➢Reševanje mehanskih problemov z MKE

- reševanje mehanskega problema z MKE poteka vsebinsko po enakih korakih, kot so opisani v poglavju "Osnove MKE"

- koraki od 1) do 4) se ne razlikujejo od reševanja že obravnavanega toplotnega problema ustaljenega prevoda toplote

➢ Koraki pri reševanju z MKE:

5) določitev začetnih, robnih in obremenitvenih pogojev

- linearno elastični mehanski problem – statično obremenjeni volumski konstrukcijski element

- parcialne diferencialne enačbe problema, zapisana v Kartezijevem koordinatnem sistemu

$$\frac{\partial \sigma_{\mathrm{xx}}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{\mathrm{xy}}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{\mathrm{xz}}}{\partial z}+\rho a_{\mathrm{x}}=0$$

$$\frac{\partial \sigma_{\mathrm{yx}}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{\mathrm{yy}}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{\mathrm{yz}}}{\partial z}+\rho a_{\mathrm{y}}=0$$

$$\frac{\partial \sigma_{\mathrm{zx}}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{\mathrm{zy}}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{\mathrm{zz}}}{\partial z}+\rho a_{\mathrm{z}}=0$$

- osnovna integralska enačba problema, pri čemer Ω predstavlja območje posameznega KE

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \sigma_{\mathrm{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{\mathrm{xy}}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{\mathrm{xz}}}{\partial z} + \rho a_{\mathrm{x}} \right] v_{\mathrm{x}} \; \mathrm{d}\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \sigma_{\mathrm{yx}}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{\mathrm{yy}}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{\mathrm{yz}}}{\partial z} + \rho a_{\mathrm{y}} \right] v_{\mathrm{y}} \; \mathrm{d}\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \sigma_{\mathrm{zx}}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{\mathrm{zy}}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{\mathrm{zz}}}{\partial z} + \rho a_{\mathrm{z}} \right] v_{\mathrm{z}} \; \mathrm{d}\Omega = 0$$

pri čemer so v_{i} poljubne funkcije

• preureditev osnovne integralske enačbe problema

$$\int_{\Omega}\left[\frac{\partial\sigma_{\mathrm{xx}}}{\partial x}\,v_{\mathrm{x}}+\frac{\partial\sigma_{\mathrm{xy}}}{\partial y}\,v_{\mathrm{x}}+\frac{\partial\sigma_{\mathrm{xz}}}{\partial z}\,v_{\mathrm{x}}\right]\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\rho a_{\mathrm{x}}\,v_{\mathrm{x}}\;\mathrm{d}\Omega=0$$

$$\int_{\Omega}\left[\frac{\partial\sigma_{\mathrm{yx}}}{\partial x}\,v_{\mathrm{y}}+\frac{\partial\sigma_{\mathrm{yy}}}{\partial y}\,v_{\mathrm{y}}+\frac{\partial\sigma_{\mathrm{yz}}}{\partial z}\,v_{\mathrm{y}}\right]\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\rho a_{\mathrm{y}}\,v_{\mathrm{y}}\;\mathrm{d}\Omega=0$$

$$\int_{\Omega}\left[\frac{\partial\sigma_{\mathrm{zx}}}{\partial x}\,v_{\mathrm{z}}+\frac{\partial\sigma_{\mathrm{zy}}}{\partial y}\,v_{\mathrm{z}}+\frac{\partial\sigma_{\mathrm{zz}}}{\partial z}\,v_{\mathrm{z}}\right]\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\rho a_{\mathrm{z}}\,v_{\mathrm{z}}\;\mathrm{d}\Omega=0$$

• upoštevajoč matematično zvezo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{xx}\, v_x\right) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\, v_x + \sigma_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\, v_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{xx}\, v_x\right) - \sigma_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_{xy}\, v_x\right) = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\, v_x + \sigma_{xy}\frac{\partial v_x}{\partial y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}\, v_x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_{xy}\, v_x\right) - \sigma_{xy}\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{xz}\, v_x\right) = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\, v_x + \sigma_{xz}\frac{\partial v_x}{\partial z} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\, v_x = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{xz}\, v_x\right) - \sigma_{xz}\frac{\partial v_x}{\partial z}$$

lahko vse tri osnovne integralske enačbe problema zapišemo v obliki

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{xx}\, v_x\right) - \sigma_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_{xy}\, v_x\right) - \sigma_{xy}\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{xz}\, v_x\right) - \sigma_{xz}\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right] \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \rho a_x\, v_x \;\mathrm{d}\Omega = 0$$

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{yx}\, v_y\right) - \sigma_{yx}\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_{yy}\, v_y\right) - \sigma_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{yz}\, v_y\right) - \sigma_{yz}\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right] \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \rho a_y\, v_y \;\mathrm{d}\Omega = 0$$

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{zx}\, v_z\right) - \sigma_{zx}\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_{zy}\, v_z\right) - \sigma_{zy}\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{zz}\, v_z\right) - \sigma_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right] \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \rho a_z\, v_z \;\mathrm{d}\Omega = 0$$

oziroma v obliki

$$\int_{\Omega} \left[\sigma_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \sigma_{xz} \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] \mathrm{d}\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{xx} v_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_{xy} v_x\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{xz} v_x\right) \right] \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \rho a_x v_x \; \mathrm{d}\Omega$$

$$\int_{\Omega} \left[\sigma_{yx} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \sigma_{yz} \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \mathrm{d}\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{yx} v_y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_{yy} v_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{yz} v_y\right) \right] \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \rho a_y v_y \; \mathrm{d}\Omega$$

$$\int_{\Omega} \left[\sigma_{zx} \frac{\partial v_z}{\partial x} + \sigma_{zy} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \mathrm{d}\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{zx} v_z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_{zy} v_z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{zz} v_z\right) \right] \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \rho a_z v_z \; \mathrm{d}\Omega$$

• z uporabo <u>Green-ovega teorema</u> lahko integral po volumnu

$$I_\Omega^{\mathrm{x}} = \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{\mathrm{xx}}\, v_{\mathrm{x}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_{\mathrm{xy}}\, v_{\mathrm{x}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{\mathrm{xz}}\, v_{\mathrm{x}}\right) \right] \mathrm{d}\Omega$$

prevedemo v integral po površini Γ, ki volumen Ω omejuje

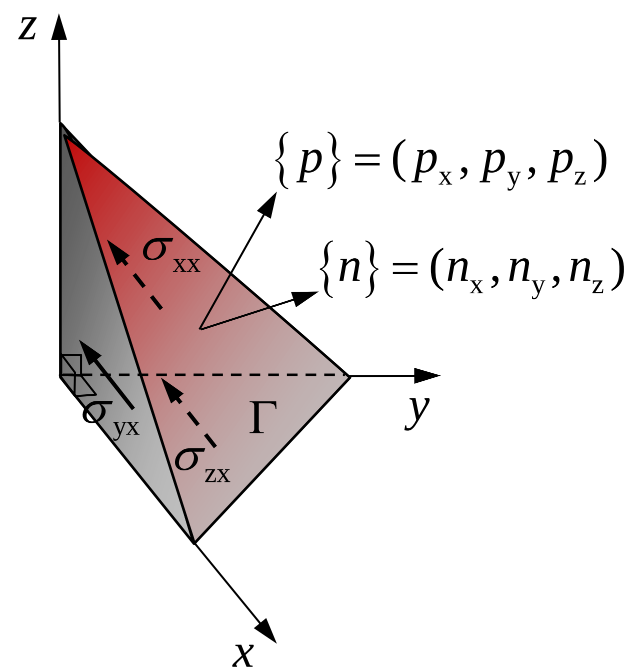
$$I_\Omega^{\mathrm{x}} = I_\Gamma^{\mathrm{x}} = \int_\Gamma \left[\sigma_{\mathrm{xx}}\, n_{\mathrm{x}} + \sigma_{\mathrm{xy}}\, n_{\mathrm{y}} + \sigma_{\mathrm{xz}}\, n_{\mathrm{z}}\right] v_{\mathrm{x}} \; \mathrm{d}\Gamma$$

pri čemer so n_x , n_y in n_z komponente enotskega normalnega vektorja $\{n\}$ na površino Γ . V zapisanem izrazu lahko izraz v oglatem oklepaju nadomestimo z x komponento napetostnega vektorja, ki učinkuje na površini Γ

$$\sigma_{\mathrm{xx}}\, n_{\mathrm{x}} + \sigma_{\mathrm{xy}}\, n_{\mathrm{y}} + \sigma_{\mathrm{xz}}\, n_{\mathrm{z}} = p_{\mathrm{x}}$$

Tako lahko integral po površini zapišemo tudi

$$I_\Gamma^{\mathrm{x}} = \int_\Gamma p_{\mathrm{x}}\; v_{\mathrm{x}} \; \mathrm{d}\Gamma$$



Analogno lahko sedaj zapišemo še preostali enačbi

$$I_\Gamma^{\mathrm{y}} = \int_\Gamma p_{\mathrm{y}} \; v_{\mathrm{y}} \; \mathrm{d}\Gamma$$

$$I_\Gamma^{\mathrm{z}} = \int_\Gamma p_{\mathrm{z}} \; v_{\mathrm{z}} \; \mathrm{d}\Gamma$$

pri čemer smo v zapisu upoštevali enakost

$$\sigma_{\mathrm{yx}} \, n_{\mathrm{x}} + \sigma_{\mathrm{yy}} \, n_{\mathrm{y}} + \sigma_{\mathrm{yz}} \, n_{\mathrm{z}} = p_{\mathrm{y}}$$

$$\sigma_{\mathrm{zx}} \, n_{\mathrm{x}} + \sigma_{\mathrm{zy}} \, n_{\mathrm{y}} + \sigma_{\mathrm{zz}} \, n_{\mathrm{z}} = p_{\mathrm{z}}$$

Tri integralske enačbe, ki izhajajo iz diferencialnih enačb ravnotežnega stanja v posamezni smeri, preidejo v obliko

$$\int_{\Omega}\left[\sigma_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x}+\sigma_{xy}\frac{\partial v_x}{\partial y}+\sigma_{xz}\frac{\partial v_x}{\partial z}\right]\mathrm{d}\Omega=\int_{\Gamma}p_x\,v_x\;\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega}\rho a_x\,v_x\;\mathrm{d}\Omega$$

$$\int_{\Omega}\left[\sigma_{yx}\frac{\partial v_y}{\partial x}+\sigma_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y}+\sigma_{yz}\frac{\partial v_y}{\partial z}\right]\mathrm{d}\Omega=\int_{\Gamma}p_y\,v_y\;\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega}\rho a_y\,v_y\;\mathrm{d}\Omega$$

$$\int_{\Omega}\left[\sigma_{zx}\frac{\partial v_z}{\partial x}+\sigma_{zy}\frac{\partial v_z}{\partial y}+\sigma_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]\mathrm{d}\Omega=\int_{\Gamma}p_z\,v_z\;\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega}\rho a_z\,v_z\;\mathrm{d}\Omega$$

Ker zajemajo isto volumsko območje Ω in njegovo površino Γ , lahko vse tri integralske enačbe seštejemo

$$\int_{\Omega}\left[\sigma_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x}+\sigma_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y}+\sigma_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}+\sigma_{xy}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)+\sigma_{xz}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+\sigma_{yz}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}\Omega=$$
$$=\int_{\Gamma}\left[p_x\,v_x+p_y\,v_y+p_z\,v_z\right]\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega}\rho\left[a_x\,v_x+a_y\,v_y+a_z\,v_z\right]\mathrm{d}\Omega$$

Zaradi krajšega zapisa, zapišimo komponente napetostnega tenzorja v vektorski obliki, pri čemer upoštevamo da je napetostni tenzor simetričen

$$\{\sigma\} = \left\{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \right\}^T$$

Vpeljimo še vektor parcialnih odvodov funkcije v, zapisan v sledeči obliki

$$\{\partial v\} = \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \quad \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \quad \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \right\}^T = [L] \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = [L]\{v\}$$

pri čemer je predstavlja matrični zapis $[L]$

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Integralsko enačbo statičnega mehanskega problema tako zapišemo

$$\int_{\Omega}\{\sigma\}\,\{\partial v\}\,\mathrm{d}\Omega=\int_{\Gamma}\{p\}\,\{v\}\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega}\rho\,\{a\}\,\{v\}\,\mathrm{d}\Omega$$

- Obravnavajmo homogen, izotropen, linearno elastičen material. Zvezo med napetostmi in deformacijami podaja Hookov reološki zakon

$$\{\sigma\}=[E]\,\{\varepsilon\}=\{\varepsilon\}^{T}\,[E]$$

pri čemer smo tudi deformacijski tenzor ε zapisali v vektorski obliki

$$\{\varepsilon\}=\left\{\varepsilon_{\mathrm{xx}}\quad\varepsilon_{\mathrm{yy}}\quad\varepsilon_{\mathrm{zz}}\quad\gamma_{\mathrm{xy}}\quad\gamma_{\mathrm{xz}}\quad\gamma_{\mathrm{yz}}\right\}^{T}$$

mehanske snovne lastnosti pa zapišimo v sledeči matrični obliki

$$[E]=\frac{E}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix}(1-v) & v & v & 0 & 0 & 0\\ v & (1-v) & v & 0 & 0 & 0\\ v & v & (1-v) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2v) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2v) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2v)\end{bmatrix}$$

- komponente napetostnega tenzorja izrazimo v odvisnosti od deformacijskega tenzorja

$$\int_\Omega \{\sigma\}\,\{\partial v\}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \{\varepsilon\}^T [E]\,\{\partial v\}\,\mathrm{d}\Omega$$

- komponente deformacijskega tenzorja lahko v Kartezijevem koordinatnem sistemu zapišemo v odvisnosti od pomikov v obravnavanem območju

$$\varepsilon_{\mathrm{xx}} = \frac{\partial u_{\mathrm{x}}}{\partial x}\,,\quad \gamma_{\mathrm{xy}} = \left(\frac{\partial u_{\mathrm{x}}}{\partial y} + \frac{\partial u_{\mathrm{y}}}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{yy}} = \frac{\partial u_{\mathrm{y}}}{\partial y}\,,\quad \gamma_{\mathrm{xz}} = \left(\frac{\partial u_{\mathrm{x}}}{\partial z} + \frac{\partial u_{\mathrm{z}}}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{zz}} = \frac{\partial u_{\mathrm{z}}}{\partial z}\,,\quad \gamma_{\mathrm{yz}} = \left(\frac{\partial u_{\mathrm{y}}}{\partial z} + \frac{\partial u_{\mathrm{z}}}{\partial y}\right)$$

$$\rightarrow\quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\mathrm{xx}} \\ \varepsilon_{\mathrm{yy}} \\ \varepsilon_{\mathrm{zz}} \\ \gamma_{\mathrm{xy}} \\ \gamma_{\mathrm{xz}} \\ \gamma_{\mathrm{yz}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{\mathrm{x}} \\ u_{\mathrm{y}} \\ u_{\mathrm{z}} \end{Bmatrix} = [L]\{u\}$$

ter tako dobimo integralski zapis izražen v odvisnosti od pomikov, ki predstavljajo primarno veličino problema

$$\int_\Omega \{\varepsilon\}^T [E]\,\{\partial v\}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \left([L]\{u\}\right)^T [E]\,\{\partial v\}\,\mathrm{d}\Omega$$

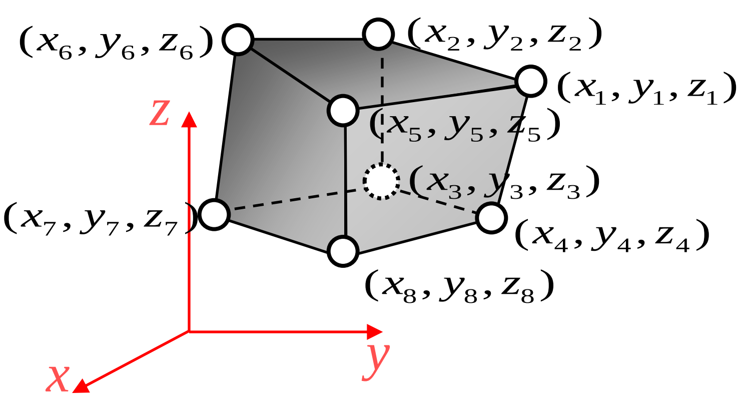
- <u>interpolacija polja pomikov po območju KE</u>

$$\{u\}=\{u_x, u_y, u_z\}^T$$

$$u_x(x,y,z)\approx \hat{u}_x(x,y,z)=\sum_{j=1}^{N_v} U_j^x\ \psi_j(x,y,z)=\left\{U^x\right\}\{\psi\}$$

$$u_y(x,y,z)\approx \hat{u}_y(x,y,z)=\sum_{j=1}^{N_v} U_j^y\ \psi_j(x,y,z)=\left\{U^y\right\}\{\psi\}$$

$$u_z(x,y,z)\approx \hat{u}_z(x,y,z)=\sum_{j=1}^{N_v} U_j^z\ \psi_j(x,y,z)=\left\{U^z\right\}\{\psi\}$$

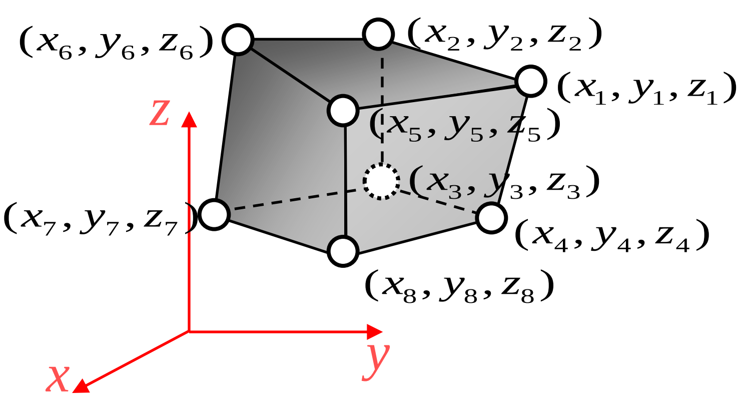


- polje pomikov po območju KE lahko sedaj v odvisnosti od vozliščnih vrednosti KE zapišemo v matrični obliki

$$\{u\}=\begin{Bmatrix} u_{\mathrm{x}} \\ u_{\mathrm{y}} \\ u_{\mathrm{z}} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \{\psi\} & 0 & 0 \\ 0 & \{\psi\} & 0 \\ 0 & 0 & \{\psi\} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \{U^{\mathrm{x}}\} \\ \{U^{\mathrm{y}}\} \\ \{U^{\mathrm{z}}\} \end{Bmatrix}=[N]\{U\}$$

- v spodnjem integralskem izrazu nastopajo kot neznane veličine pomiki vozlišč KE

$$\int_{\Omega}\left([L][N]\{U\}\right)^{T}[E]\,\{\partial v\}\,\mathrm{d}\Omega$$



- v skladu z Galerkinovo metodo izberimo poljubne funkcije v na sledeči način

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_{\mathrm{x}} \\ v_{\mathrm{y}} \\ v_{\mathrm{z}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\psi\} & 0 & 0 \\ 0 & \{\psi\} & 0 \\ 0 & 0 & \{\psi\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Upsilon^{\mathrm{x}}\} \\ \{\Upsilon^{\mathrm{y}}\} \\ \{\Upsilon^{\mathrm{z}}\} \end{Bmatrix} = [N]\{\Upsilon\}$$

pri čemer smo funkcije izrazili v odvisnosti od poljubnih vozliščnih vrednosti Υ

- parcialne odvode tako izbranih funkcij zapišemo z enačbo

$$\{\partial v\} = [L][N]\{\Upsilon\}$$

kar omogoči zapis integralskega izraza na sledeči način

$$\int_{\Omega} \left([L][N]\{U\}\right)^{T} [E]\, \{\partial v\}\, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \left([L][N]\{U\}\right)^{T} [E]\, \left([L][N]\{\Upsilon\}\right) \mathrm{d}\Omega$$

- zapišimo integralsko enačbo, upoštevajoč izbrano obliko funkcij v

$$\int_\Omega \left([L][N]\{U\}\right)^T [E] \left([L][N]\{\Upsilon\}\right) \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \{p\} \{v\} \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \rho \{a\} \{v\} \mathrm{d}\Omega =$$

$$= \int_\Gamma \{p\} [N]\{\Upsilon\} \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \rho \{a\} [N]\{\Upsilon\} \mathrm{d}\Omega$$

- poljubne vozliščne vrednosti Υ v integralskih izrazih lahko izpostavimo

$$\left\{\int_\Omega \left([L][N]\{U\}\right)^T [E] \left([L][N]\right) \mathrm{d}\Omega\right\}\{\Upsilon\} = \left\{\int_\Gamma \{p\} [N] \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \rho \{a\} [N] \mathrm{d}\Omega\right\}\{\Upsilon\}$$

Tako dobljena enačba mora veljati za poljubne vozliščne vrednosti Υ, kar pa je v splošnem edino možno, če velja enakost

$$\int_\Omega \left([L][N]\{U\}\right)^T [E] \left([L][N]\right) \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \{p\} [N] \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \rho \{a\} [N] \mathrm{d}\Omega$$

- v enačbi se nahajajo vozliščne vrednosti pomikov

$$\int_{\Omega}\Big([L][N]\{U\}\Big)^T [E]\,\Big([L][N]\Big)\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma}\{p\}\,[N]\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega}\rho\,\{a\}\,[N]\,\mathrm{d}\Omega$$

ki jih lahko izpod integrala izpostavimo

$$\left\{\int_{\Omega}\Big([L][N]\Big)^T [E]\,\Big([L][N]\Big)\,\mathrm{d}\Omega\right\}\{U\} = \int_{\Gamma}\{p\}\,[N]\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega}\rho\,\{a\}\,[N]\,\mathrm{d}\Omega$$

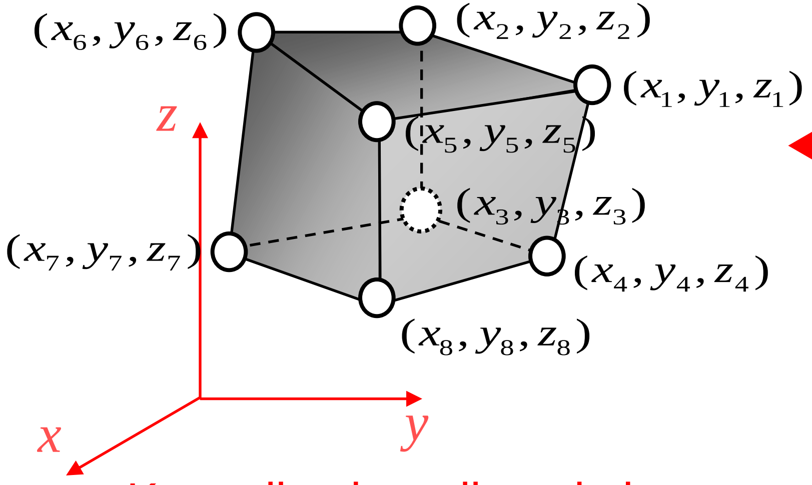
• izoparametrični KE

• interpolacija geometrije KE

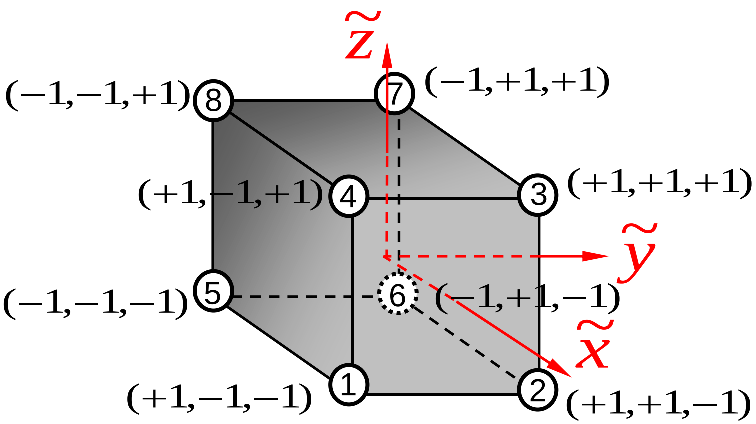
$$x = x(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \sum_{j=1}^{N_v} x_j \, \tilde{\psi}_j(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$$

$$y = y(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \sum_{j=1}^{N_v} y_j \, \tilde{\psi}_j(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$$

$$z = z(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \sum_{j=1}^{N_v} z_j \, \tilde{\psi}_j(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$$



Kartezijev koordinatni sistem



naravni koordinatni sistem

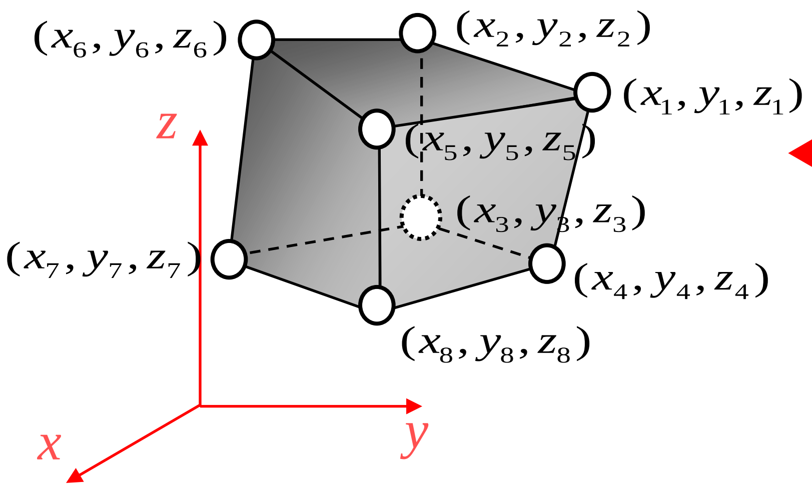
• interpolacija polja pomikov po območju KE

$$\{u\} = \{u_x, u_y, u_z\}^T$$

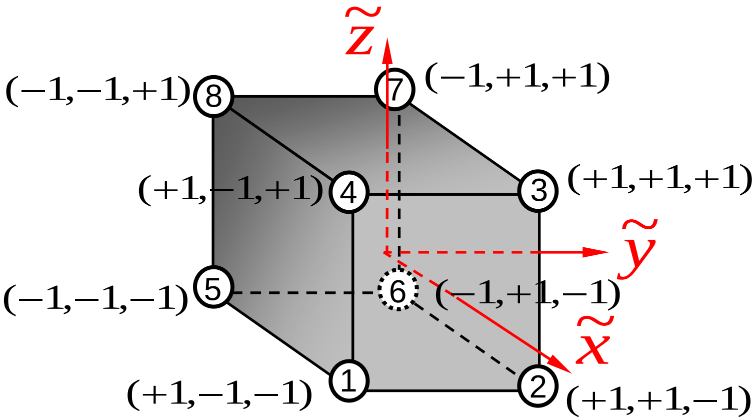
$$u_x(x,y,z) \approx \hat{u}_x(x,y,z) = \tilde{u}_x(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \sum_{j=1}^{N_v} U_j^x \; \tilde{\psi}_j(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \left\{U^x\right\}\{\tilde{\psi}\}$$

$$u_y(x,y,z) \approx \hat{u}_y(x,y,z) = \tilde{u}_y(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \sum_{j=1}^{N_v} U_j^y \; \tilde{\psi}_j(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \left\{U^y\right\}\{\tilde{\psi}\}$$

$$u_z(x,y,z) \approx \hat{u}_z(x,y,z) = \tilde{u}_z(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \sum_{j=1}^{N_v} U_j^z \; \tilde{\psi}_j(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \left\{U^z\right\}\{\tilde{\psi}\}$$



Kartezijev koordinatni sistem



naravni koordinatni sistem

- v primeru izoparametričnega KE lahko polje pomikov po območju KE v odvisnosti od vozliščnih vrednosti KE zapišemo na že znani način

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_{\mathrm{x}} \\ u_{\mathrm{y}} \\ u_{\mathrm{z}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\tilde{\psi}\} & 0 & 0 \\ 0 & \{\tilde{\psi}\} & 0 \\ 0 & 0 & \{\tilde{\psi}\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^{\mathrm{x}}\} \\ \{U^{\mathrm{y}}\} \\ \{U^{\mathrm{z}}\} \end{Bmatrix} = [\tilde{N}]\{U\}$$

na enak način izrazimo poljubne funkcije v v odvisnosti od poljubnih vozliščnih vrednosti Υ

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_{\mathrm{x}} \\ v_{\mathrm{y}} \\ v_{\mathrm{z}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\tilde{\psi}\} & 0 & 0 \\ 0 & \{\tilde{\psi}\} & 0 \\ 0 & 0 & \{\tilde{\psi}\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Upsilon^{\mathrm{x}}\} \\ \{\Upsilon^{\mathrm{y}}\} \\ \{\Upsilon^{\mathrm{z}}\} \end{Bmatrix} = [\tilde{N}]\{\Upsilon\}$$

- matrični zapis enačbe KE za linearno elastični statično obremenjeni problem

- za posamezni KE dobimo toliko enačb, kolikor ima KE prostostnih stopenj
- v vozlišču KE so neznane tri primarne veličine – pomiki, tako da ima posamezni KE $(3*N_v)$ prostostnih stopenj

$$[K]_\mathrm{e}\{U\}_\mathrm{e}=\{F\}_\mathrm{e}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1(3\mathrm{N_v})} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2(3\mathrm{N_v})} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3(3\mathrm{N_v})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{(3\mathrm{N_v})1} & K_{(3\mathrm{N_v})2} & K_{(3\mathrm{N_v})3} & \cdots & K_{(3\mathrm{N_v})(3\mathrm{N_v})} \end{bmatrix}_\mathrm{e} \begin{Bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{1z} \\ \vdots \\ U_{(3\mathrm{N_v})z} \end{Bmatrix}_\mathrm{e} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \\ \vdots \\ F_{(3\mathrm{N_v})z} \end{Bmatrix}_\mathrm{e}$$

- togostna matrika $[K]_e$ se izračuna na sledeči način

$$[K]_e = \int_{\Omega_e} \left([L][N]\right)^T \; [E] \; \left([L][N]\right) \mathrm{d}\Omega$$

- posamezni element vektorja $\{F\}_e$ predstavlja v vozlišču KE delujočo vektorsko komponento sile v smeri določene koordinatne osi

- v primeru, da je <u>velikost vektorske komponente pomika</u> v smeri določene koordinatne osi v vozlišču KE <u>poznana</u>, velikost <u>vektorske komponente sile</u> v tej smeri <u>ni poznana</u>

$$U_{ik} = \checkmark \quad \Rightarrow \quad F_{ik} = ? \,, \quad i = 1,..,N_v \,, \;\; k = x, y, z$$

- pomik je lahko poznan samo v vozlišču KE, ki leži na ograji obravnavanega območja

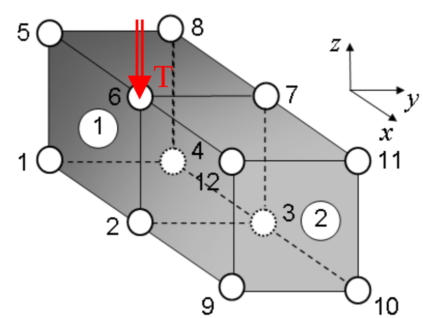
- v primeru, da velikost vektorske komponente pomika v smeri določene koordinatne osi v vozlišču KE ni poznana, je velikost vektorske komponente sile v tej smeri možno določiti

$$U_{ik} = ? \quad \Rightarrow \quad F_{ik} = \checkmark \;, \quad \mathrm{i} = 1,.., \mathrm{N_v} \;, \;\; \mathrm{k} = \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$$

- v primeru točkovne mehanske obremenitve na ograji obravnavanega območja, mrežo KE generiramo tako, da točka, v kateri deluje točkovna obremenitev, sovpada z vozliščem KE

$$F_{\mathrm{Ik}} = F_{\mathrm{Tk}} \;, \quad \mathrm{I} = \{1,.., \mathrm{N_{KE}}\} \;, \;\; \mathrm{k} = \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$$

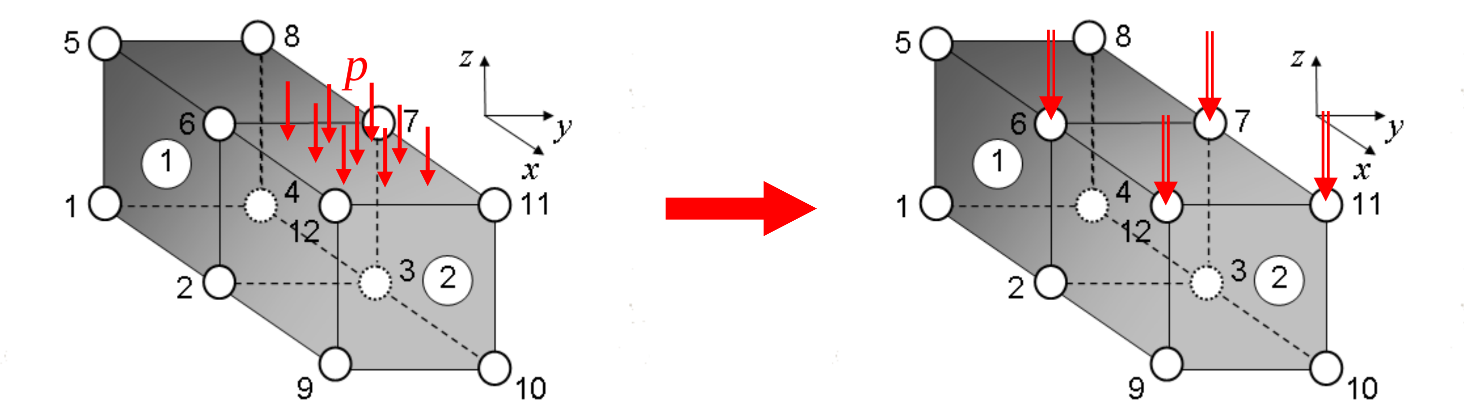
- točkovna obremenitev je vezana na vozlišče mreže KE in ne na posamezni KE



- v primeru ploskovno porazdeljene mehanske obremenitve na ograji obravnavanega območja, izračunamo ekvivalentne vozliščne sile za posamezni KE

$$\{F_\mathrm{p}\}_\mathrm{e} = \int_{\Gamma_\mathrm{e}} p[N]^T \,\mathrm{d}\Gamma$$

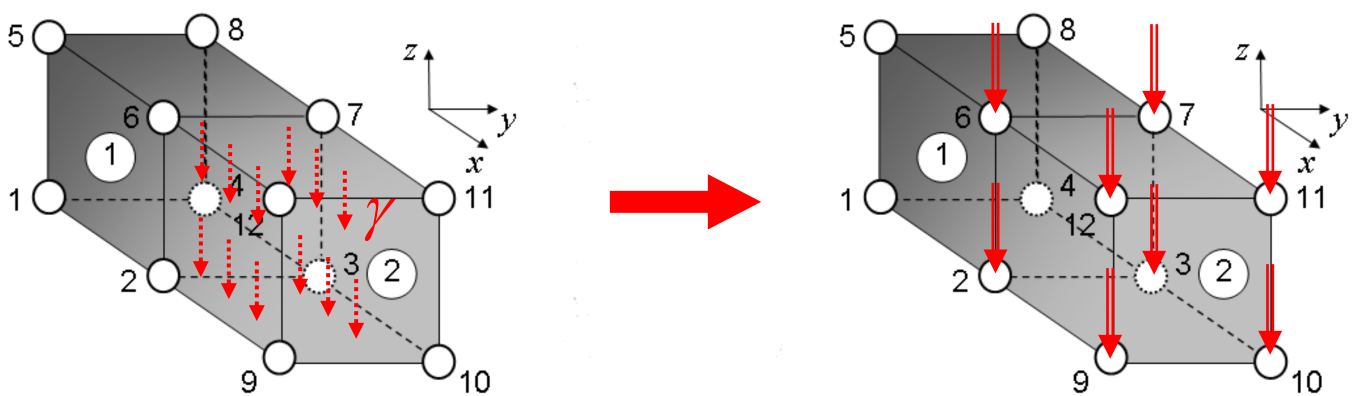
- izračun ekvivalentnih vozliščnih sil je vezan na ploskev posameznega KE



- v primeru volumsko porazdeljene mehanske obremenitve izračunamo ekvivalentne vozliščne sile za posamezni KE

$$\{F_\mathrm{V}\}_\mathrm{e} = \int_{\Omega_\mathrm{e}} \rho_\mathrm{k}\, a_\mathrm{k}\, [N]^T\, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_\mathrm{e}} \gamma [N]^T\, \mathrm{d}\Omega$$

- izračun ekvivalentnih vozliščnih sil je vezan na volumen posameznega KE



- sistem enačb za <u>celotni problem</u> zapisan v simbolni matrični obliki

$$[K]\{U\}=\{F\}$$

oziroma upoštevajoč znane in neznane vrednosti v vozliščih mreže KE

$$\begin{bmatrix} [K]_{\mathrm{RR}} & [K]_{\mathrm{RF}} \\ [K]_{\mathrm{FR}} & [K]_{\mathrm{FF}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_{\mathrm{R}} \\ \{U\}_{\mathrm{F}} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\}_{\mathrm{R}} = ? \\ \{F\}_{\mathrm{F}} \end{Bmatrix}$$

6) reševanje sistema enačb

7) prikaz in analiza rezultatov:

- izračun deformacij in napetosti poteka na nivoju posameznega KE

$$\{\varepsilon\}_{\mathrm{e}} = [L]\{u\}_{\mathrm{e}} = ([L][N])\,\{U\}_{\mathrm{e}}$$

$$\{\sigma\}_{\mathrm{e}} = [E]\,\{\varepsilon\}_{\mathrm{e}}$$

- deformacije in napetosti se izračunajo v integracijskih točkah KE

- izračun glavnih deformacij in napetosti

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}_e \quad , \ \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{Bmatrix}_e \quad , \ \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

- izračun glavnih deformacij in napetosti

$$\begin{vmatrix} T_{xx} - T & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} - T & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} - T \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ T_1 \geq T_2 \geq T_3 \quad , \ T = \varepsilon, \sigma$$

- izračun ekvivalentne napetosti

- ekvivalentna napetost po Von Misesu

$$\sigma_{\text{ekv}}^{\text{Mises}} = \sqrt[2]{0.5\,[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]}$$

- ekvivalentna napetost po Tresci

$$\sigma_{\text{ekv}}^{\text{Tresca}} = \max\left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \right)$$

- <u>tekstovni prikaz rezultatov</u>
  - v vozliščih KE
  - v integracijskih točkah KE

- <u>grafični prikaz rezultatov</u>
  - vektorsko
  - v obliki izolinij