

UNIVERZA V LJUBLJANI

Fakulteta za strojništvo

**Nelinearna analiza procesa laserskega tvorjenja kapljic**

DIPLOMSKA NALOGA UNIVERZITETNEGA ŠTUDIJA

**Blaž KRESE**

Ljubljana, september 2009



UNIVERZA V LJUBLJANI

Fakulteta za strojništvo

**Nelinearna analiza procesa laserskega tvorjenja kapljic**

DIPLOMSKA NALOGA UNIVERZITETNEGA ŠTUDIJA

**Blaž KRESE**

Mentor:izr. prof. dr. Edvard GOVEKAR, univ. dipl. inž.

Ljubljana, september 2009





Zahvaljujem se mentorju izr. prof. dr. Edvardu Govekarju, ki me je navdušil za nelinearno analizo časovnih vrst in mi potrpežljivo pomagal pri pripravi diplomske naloge. Docentu dr. Primožu Potočniku sem dolžan zahvalo za mnoge strokovne in življenjske nasvete. Posebna zahvala gre dr. Andreju Jeromnu, ki me je vpeljal v eksperimentalno delo. Hvaležen sem tudi ostalim članom Laboratorija za sinergetiko, ki so pripomogli k prijetnemu raziskovalnemu vzdušju.

Zahvalil bi se staršem, ki so mi omogočili brezskrben študij, seveda pa tudi Ani, ki mi je ves čas stala ob strani.



Copyright ©:

Blaž KRESE

podpis:

izr. prof. dr. Edvard GOVEKAR

podpis:

Kopiranje in vsakršen drug način razmnoževanja v celoti ali posameznih delov ni dovoljeno brez predhodnega pisnega dovoljenja nosilcev te pravice.

Glede na Zakon o avtorskih in sorodnih pravicah UL RS št. 21/1995 in Zakon o industrijski lastnini UR RS št. 13/1992, 13/1993, 27/1993, 34/1997 in 75/1997 velja še naslednje:

Diplomsko nalogo – arhivski izvod si je možno ogledati samo v prostorih knjižnice Fakultete za strojništvo v Ljubljani s pisnim dovoljenjem:

1. avtorja

Blaž KRESE

podpis:

2. mentorja

izr. prof. dr. Edvard GOVEKAR

podpis:

Če ni avtorjevega – diplomantovega podpisa, je diplomska naloga v knjižnici Fakultete za strojništvo v Ljubljani nedostopna za vpogled. O dostopnosti odloča tudi mentor sam ali na predlog podjetja, ki je izdelavo naloge sponzoriralo.



## Nelinearna analiza procesa laserskega tvorjenja kapljic

Blaž KRESE

**Ključne besede:** lasersko tvorjenje kapljic  
časovna vrsta  
nelinearna analiza  
rekonstrukcija atraktorja  
dimenzija vlaganja  
Poincaré-jeva sekcija

### Izvleček:

V delu smo predstavili metode nelinearne analize časovnih vrst in njihovo uporabo za karakterizacijo vpliva moči ločilnega laserskega bliska na proces laserskega tvorjenja kapljic. Za empirični opis procesa smo uporabili časovne vrste, ki smo jih generirali iz termovizijskih posnetkov procesa pri različnih močeh ločilnega bliska. Za karakterizacijo procesa smo poleg linearnih metod uporabili tudi nelinearne metode analize časovnih vrst. Nelinearna analiza zajema test stacionarnosti in nelinearnosti časovnih vrst ter rekonstrukcijo in karakterizacijo atraktorjev. Na osnovi analize časovnih vrst smo zaključili, da ločilni blisk značilno vpliva na proces laserskega tvorjenja kapljic. V odvisnosti od moči ločilnega laserskega bliska smo zaznali tri različne načine obnašanja procesa. Ugotovljeno je bilo, da je proces nizkodimenzionalen in da dimenzionalnost pada z naraščanjem moči ločilnega bliska.



## Nonlinear Analysis of the Laser Droplet Generation Process

Blaž KRESE

**Key words:** laser droplet generation  
time series  
nonlinear analysis  
attractor reconstruction  
embedding dimension  
Poincaré section

### **Abstract:**

This work presents nonlinear methods of time series analysis and their application in characterizing the influence of detachment laser pulse power on laser droplet generation process. Time series were generated from thermovision records acquired from the process using various power levels of the detachment pulse. For an empirical description of the process, generated time series were applied. Besides linear methods, nonlinear methods of time series analysis were used to characterise the process. Nonlinear analysis includes testing for stationarity and nonlinearity as well as attractor reconstruction and characterization. Based on the time series analysis we concluded that there was a significant influence of detachment pulse power on laser droplet generation. In dependence on detachment pulse power, three qualitatively different behaviours of the laser droplet generation process were observed. Low dimensionality of the process was found to be characteristic. The dimensionality of the process decreases with increasing power of the detachment pulse.





# Kazalo

Uporabljene oznake	xv
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
1.1 Predstavitev problema . . . . .	1
1.2 Namen dela . . . . .	2
1.3 Potek dela . . . . .	2
<b>2 Teoretične osnove</b>	<b>3</b>
2.1 Določanje časa zamika rekonstrukcije atraktorja . . . . .	7
2.1.1 Določanje časovnega zamika z avtokovariančno funkcijo . . . . .	7
2.1.2 Določanje časovnega zamika z vzajemno informacijo . . . . .	7
2.2 Določanje minimalne potrebne dimenzije vlaganja . . . . .	10
2.3 Dimenzije . . . . .	13
2.4 Poincaré -jeva sekcija in določanje nestabilnih mejnih zank . . . . .	17
2.4.1 Določanje nestabilnih mejnih zank . . . . .	18
2.5 Testiranje nelinearnosti z nadomestnimi časovnimi vrstami . . . . .	20
2.6 Rekonstrukcija atraktorja z metodo glavnih osi . . . . .	23
2.7 Nelinearni test stacionarnosti . . . . .	25
<b>3 Eksperimentalni sistem in časovne vrste</b>	<b>27</b>
3.1 Proces laserskega tvorjenja kapljic . . . . .	27
3.2 Eksperimentalno mesto . . . . .	29
3.3 Izvedba poiskusov in tvorjenje časovnih vrst . . . . .	30
<b>4 Analiza procesa na osnovi časovnih vrst</b>	<b>33</b>
4.1 Uvodna analiza časovnih vrst . . . . .	33
4.2 Nelinearna analiza časovnih vrst . . . . .	40
4.2.1 Analiza časovne vrste pri moči ločilnega bliska $P_{lb} = 0\text{ W}$ . . . . .	40
4.2.2 Analiza in primerjava izbranih časovnih vrst . . . . .	44

<b>5</b>	<b>Diskusija</b>	<b>53</b>
5.1	Splošno o nelinearni analizi časovnih vrst . . . . .	53
5.2	Izvedba poiskusov . . . . .	53
5.3	Analiza procesa na osnovi časovnih vrst . . . . .	54
5.3.1	Uvodna analiza časovnih vrst . . . . .	54
5.3.2	Nelinearna analiza časovnih vrst . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Zaključki</b>	<b>61</b>
	<b>Literatura</b>	<b>64</b>
<b>A</b>	<b>Pregled časovnih vrst</b>	<b>67</b>
<b>B</b>	<b>Histogrami časovnih vrst</b>	<b>72</b>
<b>C</b>	<b>Primer nelinearnega filtriranja</b>	<b>76</b>

# Uporabljene oznake

**Tabela 1:** Okrajšave

Oznaka	Pomen
IR	infrardeči
LTK	lasersko tvorjenje kapljic
Nd:YAG	granat itrijevega aluminija z dodatkom neodima
PCA	metoda glavnih osi (angl. <i>principal components analysis</i> )

**Tabela 2:** Spremenljivke

Oznaka	Enota	Pomen
$a_{max}$	[m/s <sup>2</sup> ]	največji pospešek podajalnika
$\mathcal{A}$		atraktor
$C()$		korelacijski integral
$Cov(\tau)$		avtokovariančna funkcija
$d$		dimenzionalnost dinamičnega sistema, dimenzija prostora stanj
$d_{\mathcal{A}}$		dimenzija atraktorja
$d_f$	[m]	premer laserskega žarka v gorišču
$D$		korelacijska dimenzija ocenjena s korelacijskim integralom
$D_0$		kapacitivna dimenzija atraktorja
$D_1$		informacijska dimenzija atraktorja
$D_2$		korelacijska dimenzija atraktorja
$D_q$		posplošena dimenzija atraktorja
$e$		napaka nelinearne napovedi
$E$		matrika lastnih vektorjev matrike $S_K S_K^T$
$f$	[Hz]	frekvenca

Oznaka	Enota	Pomen
$\underline{f}$		zvezna vektorska funkcija
$f_g$	[m]	goriščna razdalja
$f_{nn}$		delež nepravih najbližjih sosedov
$\underline{F}$		diskretna vektorska funkcija
$g_1$		koeficient poševnosti
$g_2$		koeficient sploščenosti
$h$		merljiva skalarna funkcija
$H$		entropija
$H_0$		ničelna hipoteza
$I$		signal izsevane IR svetlobe
$\mathcal{I}$		informacija
$K$		kovariančna matrika
$m$		dimenzija vlaganja
$m_e$		minimalna dimenzija vlaganja
$M_{ij}$		$(i, j)$ -ti element matrike $M$
$\mathcal{M}$		fazni prostor
$n$		indeks, diskretni čas
$n_{min}$		korelacijski diskretni čas
$N$		število točk v časovni vrsti
$N_b$		število nepraznih hiperkock, potrebnih za pokritje atraktorja
$N_{fnn}$		število nepravih najbližjih sosedov
$N_i$		število točk v $i$ -ti hiperkocki
$N_I$		število intervalov razdelitve časovne vrste
$N_{nn}$		število vseh najbližjih sosedov
$N_s$		število točk, na intervale razdeljene časovne vrste, v enem intervalu
$N_v$		število iz časovne vrste rekonstruiranih vektorjev
$p$		perioda
$p()$		verjetnostna funkcija
$p(k)$		verjetnost za nastop $k$ -tega dogodka $X = x_k$
$p_k$		verjetnost za nastop $k$ -tega dogodka $X = x_k$ ; $p_k \equiv p(k)$
$pc_1$		prva glavna os
$pc_2$		druga glavna os
$pc_3$		tretja glavna os
$\underline{P}$		Poincaré-jeva preslikava
$P_b$	[W]	moč laserskega bliska

Oznaka	Enota	Pomen
$P_{lb}$	[W]	moč ločilnega laserskega bliska
$\overline{P}$	[W]	povprečna moč laserskih bliskov
$\mathbb{R}_+$		pozitivna realna števila
$\mathbb{R}^d$		$d$ -dimenzionalni realni prostor
$R_a$		standardna deviacija časovne vrste
$R_m$		Evklidska razdalja v $m$ -dimenzionalnem prostoru
$s$		merjena skalarna spremenljivka
$s_n$		$n$ -ta izmerjena vrednost skalarne spremenljivke $s$
$s'_n$		$n$ -ta točka nadomestne časovne vrste
$\hat{s}_n$		napovedana $n$ -ta meritev
$\tilde{s}(f)$		Fourier-jeva transformiranka zvezne časovne vrste $s(t)$
$\tilde{s}_k$		diskretna Fourier-jeva transformiranka
$\tilde{s}'_k$		Fourier-jeva transformiranka z naključno spremenjeno fazo
$\underline{s}_{K,i}$		rekonstruiran $i$ -ti vektor z elementi s srednjo vrednostjo nič
$\underline{s}_n$		$n$ -ti vektor v rekonstruiranem faznem prostoru
$\underline{s}_n^m$		točka v $m$ -dimenzionalnem rekonstruiranem faznem prostoru
$\underline{s}_n^{m,NN}$		najbližji sosed točke $\underline{s}_n^m$
$S$		Poincaré-jeva sečna ploskev
$S_K$		matrika vektorjev $\underline{s}_{K,i}$
$\mathcal{S}_i$		$i$ -ti interval, na časovne intervale razdeljene časovne vrste
$t$	[s]	čas, bodisi zvezen ali diskreten
$\mathcal{U}$		množica začetnih pogojev
$\mathcal{U}_\epsilon()$		okolica z radijem $\epsilon$
$v_p$	[m/s]	hitrost podajanja žice
$v_{p,max}$	[m/s]	maksimalna hitrost podajanja
$w()$		kernel
$x$		vrednost naključne spremenljivke $X$
$x_k$		$k$ -ta vrednost naključne spremenljivke $X$
$\underline{x}$		vektor stanja
$X$		naključna spremenljivka
$y$		vrednost naključne spremenljivke $Y$
$Y$		naključna spremenljivka
$z$	[m]	korak pomika žice
$\mathbb{Z}_+$		pozitivna cela števila

Oznaka	Enota	Pomen
$\alpha$		stopnja značilnosti statističnega testa
$\epsilon$		razdalja, rob hiperkocke
$\phi_t$		družina preslikav
$\varphi_k$		naključna sprememba faze Fourier-jeve transformiranke
$\Theta()$		Heaviside-ova funkcija
$\lambda$	[m]	valovna dolžina
$\lambda_s$		nelinearna statistika za preverjanje ničelne hipoteze
$\Lambda$		diagonalna matrika lastnih vrednosti
$\nu$	[Hz]	frekvenca laserskih bliskov
$\rho_a$		dodatna mejna vrednost pri določanju nepravih najbližjih sosedov
$\rho_r$		mejna vrednost pri določanju nepravih najbližjih sosedov
$\sigma$		standardna deviacija
$\tau$		časovni zamik
$\tau_s$		časovni korak pri numeričnem reševanju sistema diferencialnih enačb
$\Delta n$		diskretni časovni korak
$\Delta t$	[s]	čas vzorčenja
$\langle s \rangle_n$		vzorčno povprečje časovne vrste
$\langle s_i \rangle$		vzorčno povprečje elementov $i$ -tega rekonstruiranega vektorja

# Poglavje 1

## Uvod

Človek ima že od nekdaj željo po krmiljenju in optimiranju naravnih in tehniških procesov tako, da bi imel od njih čim večjo korist. Za učinkovito krmiljenje in optimiranje procesa je potrebno poznati njegove dinamske lastnosti ter vpliv posameznih parametrov procesa na te lastnosti. Zaradi kompleksnosti procesov dinamski modeli, ki bi zadovoljivo opisali obravnavane procese pogosto niso poznani. Zato se za posredni opis in karakterizacijo procesov uporabljajo časovne vrste karakterističnih spremenljivk procesov.

V pričujočem delu smo raziskali možnost karakterizacije lastnosti procesa laserskega tvorjenja kapljic iz kovinske žice in vpliv moči ločilnega bliska na proces na osnovi nelinearne analize izmerjenih časovnih vrst.

### 1.1 Predstavitev problema

Pri procesu laserskega tvorjenja kapljic z laserskim bliskom, ki ga usmerimo v konec žice, tvorimo kovinsko kapljico. Pri tem žico med bliskom ustrezno podajamo. Proces laserskega tvorjenja kapljic je fenomenološko in časovno razdeljen na dva dela. V prvem delu laserski blisk stali konec žice. Staljeni konec žice se pod vplivom sil preoblikuje v visečo kapljico. V drugem delu laserski blisk povzroči ločitev kapljice od žice. Optimalni časovni potek moči bliska za tvorjenje posamezne kapljice je bil raziskan v [1]. Problem se pojavi, ko želimo zaporedno tvoriti več kapljic na sekundo. Pogosto se zgodi, da ne pride do ločitve kapljice, ampak ta obvisi na žici in zaradi nadaljnjih bliskov ter podajanja žice raste, nato pa se nenadzorovano loči. Razlog za neuspele ločitve kapljic je predvsem neustrezen vnos toplotne energije [2]. V dosedanjih raziskavah je bil temeljito raziskan prvi del procesa laserskega tvorjenja kapljic, to je tvorjenje viseče kapljice. Vpliv ločilnega bliska, ki domnevno vpliva na proces laserskega tvorjenja kapljic pa še ni bil raziskan.

## 1.2 Namen dela

Namen dela je analiza procesa laserskega tvorjenja kapljic na podlagi izmerjenih časovnih vrst. Glavni cilj analize je karakterizacija vpliva moči ločilnega bliska na proces laserskega tvorjenja kapljic. Proces laserskega tvorjenja kapljic bomo empirično opisali s časovnimi vrstami, ki jih generiramo iz termovizijskih posnetkov procesa. Da bi proces čim bolj okarakterizirali bomo poleg linearnih metod za analizo časovnih vrst uporabili tudi nelinearne metode, ki so namenjene odkrivanju nelinearnih korelacij v časovnih vrstah.

## 1.3 Potek dela

Delo je razdeljeno na šest poglavij. Po uvodnih besedah so v poglavju 2 predstavljene nelinearne metode analize časovnih vrst in njihova uporaba na primeru časovne vrste prve spremenljivke Lorenz-ovega sistema. Kot osnova nelinearne analize je najprej predstavljena rekonstrukcija atraktorja iz skalarne časovne vrste. Sledi predstavitev metod karakterizacije atraktorjev, ter test nelinearnosti in nelinearni test stacionarnosti časovnih vrst.

V poglavju 3 opišemo proces laserskega tvorjenja kapljic, pri čemer povdarimo težave, ki nastanejo pri tvorjenju več kapljic na sekundo. Sledi opis eksperimentalnega mesta in izvedbe poskusov zaporednega tvorjenja kapljic pri izbrani pogostosti za različne moči ločilnega bliska. Na koncu je opisan še način tvorjenja časovnih vrst iz termovizijskih posnetkov procesa.

V poglavju 4 je predstavljena karakterizacija procesa laserskega tvorjenja kapljic na osnovi analize izmerjenih časovnih vrst. V uvodnem delu so najprej predstavljene nekatere linearne karakteristike procesa v odvisnosti od moči ločilnega laserskega bliska. Izbrane časovne vrste so nato dodatno analizirane z nelinearnimi metodami.

V diskusiji še enkrat ponovimo najpomembnejše rezultate in jih po potrebi dodatno pojasnimo. Omenimo tudi nekaj ugotovitev, ki pripomorejo k boljšemu razumevanju rezultatov analize in jih prej nismo eksplicitno navedli.

V poglavju 6 povzamemo rezultate diplomskega dela in podamo nekaj predlogov za nadaljnje raziskovalna delo.



## Poglavje 2

# Teoretične osnove

Metode, ki jih bomo uporabili temeljijo na teoriji *determinističnih dinamičnih sistemov* in teoriji *kaotične dinamike*. Zato bomo na tem mestu podali nekaj osnovnih pojmov.

V splošnem dinamični sistem opišemo z dvojico  $(\mathcal{M}, \phi_t)$ , kjer je  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^d$  množica vseh možnih stanj dinamičnega sistema in se imenuje *fazni prostor* ali *prostor stanj*,  $\phi_t$  pa predstavlja družino preslikav nad  $\mathcal{M}$  [3, 4, 5]. Stanje dinamičnega sistema ob času  $t$  predstavimo z  $d$ -dimenzionalnim vektorjem  $\underline{x} = \underline{x}(t) \in \mathcal{M}$ . Če je  $t \in \mathbb{Z}_+$  govorimo o *diskretnih dinamičnih sistemih*, oziroma o *zveznih dinamičnih sistemih*, ko je  $t \in \mathbb{R}_+$ . Za družino preslikav

$$\phi_t(\underline{x}) : \mathcal{M} \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{M} \quad t \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.1)$$

oziroma

$$\phi_t(\underline{x}) : \mathcal{M} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M} \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.2)$$

velja

$$\phi_{t'}(\underline{x}) = \phi_{t'}(\underline{x}(t)) = \underline{x}(t + t') \quad (2.3)$$

in lastnost kompozicije

$$\phi_{t_1+t_2}(\underline{x}) = \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}(\underline{x}). \quad (2.4)$$

Enačba (2.3) pomeni, da deterministična preslikava  $\phi_{t'}$  preslika stanje sistema  $\underline{x}(t)$  v stanje  $\underline{x}(t + t')$ . Iz iste enačbe zato sledi enakost  $\phi_0(\underline{x}(t)) = \underline{x}(t)$ . Predpisu  $t \rightarrow \underline{x}(t) = \phi_t(\underline{x}_0)$  pravimo *trajektorija* ali *orbita* z začetnim pogojem  $\underline{x}_0$ .

V primeru diskretnih dinamičnih sistemov lahko preslikavo za  $t$  časovnih korakov po enačbi (2.4) zapišemo kot  $t$ -kratni kompozitum preslikave za en časovni korak

$$\phi_t(\underline{x}) = \underbrace{\phi_1 \circ \phi_1 \circ \dots \circ \phi_1}_{t}(\underline{x}) = \underline{F}^{(t)}(\underline{x}), \quad \underline{F} \equiv \phi_1. \quad (2.5)$$

Računanje orbite  $\underline{x}(t) = \phi_t(\underline{x}_0)$ , z znanim začetnim pogojem  $\underline{x}_0$  in za  $t = 0, 1, 2, \dots$ , se tako prevede na reševanje vektorske diferenčne enačbe

$$\underline{x}(t + 1) = \underline{F}(\underline{x}(t)), \quad (2.6)$$

ki je v splošnem nelinearna. Pri diferenčnih enačbah navadno vpeljemo oznako  $\underline{x}(t) \equiv \underline{x}_t \equiv \underline{x}_n$  in tako enačbo (2.6) zapišemo kot

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{F}(\underline{x}_n). \quad (2.7)$$

Pri zveznih dinamičnih sistemih se iskanje orbite  $\underline{x}(t)$  z začetnim pogojem  $\underline{x}_0$  prevede na reševanje vektorske diferencialne enačbe prvega reda. Po definiciji odvoda zapišemo

$$\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{x}(t + \Delta t) - \underline{x}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi_{\Delta t}(\underline{x}) - \phi_0(\underline{x})}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\phi_t(\underline{x})|_{t=0}, \quad (2.8)$$

oziroma

$$\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)), \quad \underline{f} \equiv \frac{d}{dt}\phi_t|_{t=0}. \quad (2.9)$$

Diferencialna enačba (2.9) je v splošnem nelinearna, zato njeno rešitev  $\underline{x}(t)$ , z danim začetnim pogojem  $\underline{x}_0$  navadno izračunamo numerično. Pokazali smo, da do diferenčnih, oziroma diferencialnih enačb pridemo preko družine preslikav  $\phi_t$ , zato tudi za enačbi (2.7) in (2.9) pravimo, da predstavljata (deterministični) dinamični sistem [5]. Bolj natančno obravnavo dinamičnih sistemov lahko najdemo v [3].

Pri dinamičnih sistemih poleg pojma faznega prostora in trajektorije, potrebujemo še pojem *atraktorja*. Atraktor je geometrijska struktura - množica  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$  kamor se po prehodnem času stekajo trajektorije. Bolj natančno je atraktor definiran kot zaprta množica  $\mathcal{A}$  za katero velja [3, 6]

- $\mathcal{A}$  je *invariantna* glede na  $\phi_t$ : vsaka trajektorija, ki se začne v  $\mathcal{A}$ , ostane v  $\mathcal{A}$  ves čas. Formalno zapišemo: če  $\underline{x}(0) \in \mathcal{A}$  potem  $\phi_t(\underline{x}(0)) \in \mathcal{A}$ ,  $\forall t > 0$ .
- $\mathcal{A}$  privlači vse trajektorije, ki imajo začetne točke dovolj blizu  $\mathcal{A}$ . Formalno zapišemo:  $\mathcal{U} \supset \mathcal{A}$  je odprta množica. Razdalja med trajektorijo  $\underline{x}(t)$ , ki ima začetno točko  $\underline{x}(0) \in \mathcal{U}$ , in množico  $\mathcal{A}$  gre proti nič, ko  $t \rightarrow \infty$ . Največja množica  $\mathcal{U}$  se imenuje *bazen privlačnosti atraktorja*  $\mathcal{A}$ .
- $\mathcal{A}$  je *minimalna* množica: v  $\mathcal{A}$  ne obstaja nobena množica, ki bi bila podmnožica množice  $\mathcal{A}$  in bi zanjo veljali pravili prve in druge alineje.

Primera enostavnega atraktorja disipativnega sistema sta fiksni točki *stabilni vozle* in *stabilni fokus*. Nadaljni primer je stabilna mejna zanka, kjer sistem po prehodnem času preide v periodično gibanje. Dimenzionalnost omenjenih atraktorjev je 0, oziroma 1. Konzervativni sistemi nimajo atraktorjev. Fiksna točka konzervativnega sistema se imenuje *center*. Trajektorije konzervativnih sistemov so zaključene same vase (periodično gibanje) in so povsem odvisne le od začetnih pogojev. Povedati je potrebno, da ima dinamični sistem lahko tudi več atraktorjev [6]. Poleg omenjenih atraktorjev s celoštevilčnimi dimenzijami pa poznamo tudi tako imenovane *čudne atraktorje*, ki imajo neceloštevilčno dimenzijo [6]. Takšni dimenziji

pravimo *fraktalna dimenzija*. Dinamični sistemi, ki imajo atraktor s fraktalno dimenzijo, so navadno *kaotični*, ni pa nujno [6].

Na j bo toliko dovolj o splošni teoriji dinamičnih sistemov in se raje posvetimo bolj realnim problemom, ko želimo nek naravni proces opisati, kot dinamični sistem.

Kadar opazujemo nek naravni dinamski proces, oziroma sistem, navadno ne poznamo diferencialnih ali diferencialnih enačb s katerimi ga lahko opišemo, zato izvedemo meritev, navadno skalarne spremenljivke  $s$ , ki je značilna za ta proces. Za opis procesa imamo tako na voljo časovno zaporedje izmerjenih vrednosti, ki ga imenujemo *časovna vrsta*. Če je spremenljivka  $s$  res značilna za proces, potem je njena izmerjena vrednost odvisna od trenutnega stanja  $\underline{x}(t)$  opazovanega sistema, zato  $n$ -to zaporedno meritev  $s_n$  zapišemo

$$s_n = h(\underline{x}(n\Delta t)) \quad n = 1, \dots, N \quad (2.10)$$

kjer je  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  neznana merljiva skalarna funkcija,  $\Delta t$  je čas vzorčenja,  $N$  pa predstavlja število meritev, oziroma število točk v časovni vrsti. Če upoštevamo še prisotnost šuma pri meritvah, potem  $n$ -to meritev zapišemo v obliki

$$s_n = h(\underline{x}(n\Delta t)) + \eta_n \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.11)$$

Za šum  $\eta_n$  predpostavimo, da je povsem naključen in nekoreliran z izmerjenim signalom  $h(\underline{x}(n\Delta t))$ .

Časovno vrsto si lahko predstavljamo kot projekcijo atraktorja z dimenzijo  $d_A$  iz originalnega neznanega faznega prostora na enodimenzionalni prostor, realno os. Jasno je, da ena sama skalarne spremenljivke ne more povsem opisati večdimenzionalnega dinamskega procesa in njegovega originalnega faznega prostora. Običajno se izkaže, da je dovolj, da iz časovne vrste rekonstruiramo fazni prostor, v katerem bo atraktor ekvivalenten originalnemu atraktorju [7]. Postopku rekonstrukcije faznega prostora iz časovne vrste pravimo *vlaganje*, dobljeni prostor pa *vložitveni prostor* ali *prostor vlaganja*.  $m$ -dimenzionalni prostor vlaganja iz časovne vrste rekonstruiramo z  $m$ -dimenzionalnimi vektorji stanj  $\underline{s}_n$  (Takens, 1981), ki imajo za svoje komponente *časovno zamaknjene koordinate*

$$\underline{s}_n = (s_{n-(m-1)\tau}, s_{n-(m-2)\tau}, \dots, s_{n-\tau}, s_n), \quad (2.12)$$

kjer je  $\tau$  *časovni zamik*, v časovnih enotah  $\tau\Delta t$ ,  $m$  pa *dimenzija prostora vlaganja*. Iz časovne vrste z  $N$  točkami lahko rekonstruiramo  $N_v = N - (m-1)\tau$  vektorjev  $\underline{s}_{(m-1)\tau+1}, \dots, \underline{s}_N$ .

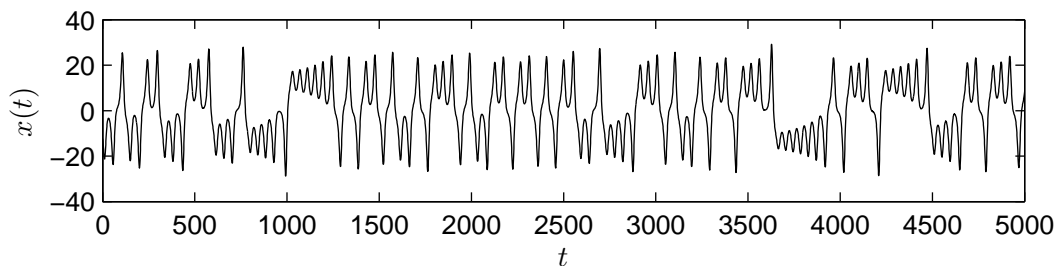
Temelj rekonstrukcije faznega prostora je *vložitveni teorem* [7, 8], ki zagotavlja, da je rekonstruiran atraktor ekvivalenten originalnemu atraktorju, če je  $m = 2d + 1$ , kjer je  $d$  dimenzija originalnega faznega prostora. Pod pojmom ekvivalentna atraktorja razumemo, da mora obstajati povratno enolična preslikava med rekonstruiranim in originalnim atraktorjem, kar pomeni, da mora biti vložitveni prostor dovolj velik, da se trajektorija rekonstruiranega

atraktorja ne seka. Razdalje med točkami v pravilno rekonstruiranem prostoru so posledica lastnosti atraktorja in ne posledica projekcije atraktorja na prostor s premajhno dimenzijo. Nadalje za ekvivalentna atraktorja velja, da imata enako dimenzijo, Ljapun-ove eksponente in entropijo [7]. V literaturi je pogosto kot zadostna dimenzija vložitvenega prostora naveden pogoj  $m > 2d_A$ , kjer je  $d_A$  dimenzija atraktorja, ki bo opredeljena v razdelku 2.3 [7, 8]. Omenjena pogoja sta zadostna, ne pa tudi potrebna. V mnogih primerih se izkaže, da je potrebna dimenzija vložitvenega prostora manjša od zadostne dimenzije tako, da včasih zadostuje že dimenzija  $2d_A > m > d_A$  [7].

Nadaljnja obravnava bo usmerjena v nelinearno analizo časovnih vrst in bo podkrepljena z izbranim numeričnim primerom časovne vrste. Pri (nelinearni) analizi časovnih vrst so namreč poleg dobrega razumevanja uporabljenih metod, zelo pomembne tudi izkušnje, zato je priporočljivo, da metode, predno jih uporabimo na svojih časovnih vrstah, preizkusimo na numerično dobljenih podatkih, za katere lastnosti že poznamo [7]. Navadno se v te namene uporabi *Lorenz-ov dinamični sistem*, ki je definiran s sistemom enačb

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= \sigma(y(t) - x(t)) \\ dy(t)/dt &= -x(t)z(t) + rx(t) - y(t) \\ dz(t)/dt &= x(t)y(t) - bz(t), \end{aligned} \quad (2.13)$$

kjer uporabimo standardne parametre  $\sigma = 16$ ,  $r = 45.92$  in  $b = 4$  [8]. Rešitev sistema diferencialnih enačb (2.13) izračunamo numerično z metodo Runge Kutta četrtega reda s časovnim korakom  $\tau_s = 0.01$ , ampak to je rešitev v posameznih točkah, preslikave  $t \rightarrow \underline{x}(t) = \phi_t(\underline{x}_0)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  ne poznamo. Rešitev sistema (2.13) je torej diskretna vektorska časovna vrsta  $\underline{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , za katero pa vseeno pravimo, da predstavlja zvezno rešitev, saj so si posamezne točke, zaradi majhnega časovnega koraka blizu. V nadaljevanju bomo predpostavili, da poznamo samo prvo komponento rešitve, časovno vrsto spremenljivke  $x(t)$ , prikazane na sliki (2.1). Še bolj nazorno si lahko zamislimo, da smo časovno vrsto  $x(t)$  izmerili na nekem sistemu, ki ga želimo opisat kot dinamični sistem. Opomnimo, da je čas diskreten,



**Slika 2.1:** Prikaz 5000 točk časovne vrste prve komponente Lorenz-ovega sistema po prehodnem pojavu

$t = 0, 1, 2, \dots$  in določa zaporedje točk rešitve sistema (2.13), vendar se v primeru te časovne

vrste ne bomo držali oznak, kot je bilo to storjeno za enačbo (2.7). S tem želimo opomniti, da je  $x(t)$  komponenta zveznega dinamičnega sistema, čeprav poznamo njene vrednosti le ob diskretnih časovnih presledkih. Realni brezdimenzijski čas dobimo s produktom  $\tau_s t$ . Na tej časovni vrsti bomo razložili in pokazali uporabo metod, ki jih bomo kasneje uporabili na izmerjenih časovnih vrstah.

## 2.1 Določanje časa zamika rekonstrukcije atraktorja

Rekonstruiran fazni prostor je osnova vseh metod, ki jih bomo uporabili pri nelinearni analizi časovnih vrst. Fazni prostor rekonstruiramo tako, da iz časovne vrste po enačbi (2.12) tvorimo vektorje stanj. Seveda je rezultat rekonstrukcije odvisen od izbire dimenzije  $m$  in časovnega zamika  $\tau$ . Če je  $\tau$  majhen potem je  $s_n \approx s_{n-\tau}$ . Točke so linearno korelirane in bodo v faznem prostoru ležale skoraj na premici. Po drugi skrajnosti, če je  $\tau$  prevelik bosta  $s_n$  in  $s_{n-\tau}$  nekorelirani in zato bodo točke v faznem prostoru ležale povsem naključno. Za določanje ustreznega časovnega zamika bomo predstavili dve metodi

- določanje  $\tau$  z avtokovariančno funkcijo,
- določanje  $\tau$  z vzajemno informacijo.

### 2.1.1 Določanje časovnega zamika z avtokovariančno funkcijo

Izmerjene časovne vrste imajo vedno končno mnogo elementov, zato so vse karakteristike, ki jih računamo na časovnih vrstah, *cenilke*. Srednjo vrednost časovne vrste ocenimo z vzorčnim povprečjem  $\langle s \rangle_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s_n$ , cenilko za avtokovariančno funkcijo pa definira izraz

$$Cov(\tau) = \frac{\frac{1}{N-\tau} \sum_{n=1+\tau}^N s_n s_{n-\tau} - \langle s \rangle_n^2}{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (s_n - \langle s \rangle_n)^2}. \quad (2.14)$$

Člen v imenovalcu predstavlja vzorčno varianco. Za ustrezen časovni zamik pri rekonstrukciji atraktorja vzamemo  $\tau$ , pri katerem ima avtokovariančna funkcija prvo ničlo  $Cov(\tau) = 0$ .

### 2.1.2 Določanje časovnega zamika z vzajemno informacijo

Naj naključna spremenljivka  $X$  z zalogo vrednosti  $\{x_k; k = 0, 1, 2, \dots, K\}$  dovolj natančno opiše opazovan pojav. Vsakemu dogodku  $X = x_k$  priredimo število  $p(k)$

$$P(X = x_k) = p(k), \quad (2.15)$$

ki predstavlja verjetnost, da se zgodi dogodek  $X = x_k$ . Pri tem mora veljati

$$0 \leq p(k) \leq 1 \quad \sum_{k=0}^K p(k) = 1. \quad (2.16)$$

Recimo, da se dogodek  $X = x_k$  zgodi z verjetnostjo  $p(k) = 1$ , kar pomeni, da je  $p(i) = 0$  za vse  $i \neq k$ . Ob nastopu takšnega dogodka pravimo, da ni "presenečenja", oziroma nedoločenosti poskusa, saj se zagotovo zgodi. Če imamo dogodke, ki se zgodijo z različnimi verjetnostmi, potem manjša kot je verjetnost  $p(k)$  za nastop dogodka  $X = x_k$ , večje je presenečenje, s tem pa je večja tudi *informacija*. Informacija dogodka je torej obratno sorazmerna z verjetno njegovega nastopa. Količino informacije ob nastopu dogodka  $X = x_k$  z verjetnostjo  $p(k)$  definiramo [9]

$$\mathcal{I}(x_k) = \log\left(\frac{1}{p(k)}\right) = -\log(p(k)). \quad (2.17)$$

Informacija  $\mathcal{I}(x_k)$  je diskretna naključna spremenljivka z verjetnostjo  $p(k)$ , zato nas zanima njeno statistično povprečje po celotnem območju, ki je

$$H(X) = E[\mathcal{I}(x_k)] = \sum_{k=0}^K p(k)\mathcal{I}(x_k) = -\sum_{k=0}^K p(k)\log(p(k)). \quad (2.18)$$

Količini  $H(X)$  pravimo *entropija* diskretne naključne spremenljivke  $X$  in predstavlja mero povprečne informacije na dogodek. Poudarimo, da  $X$  v izrazu  $H(X)$  ne nastopa kot argument, temveč samo kot oznaka za naključno spremenljivko, na katero se entropija nanaša. Pripomnimo še, da privzamemo enakost  $0\log(0) \equiv 0$ . Nadaljuje definiramo pogojno entropijo [9]

$$H(X | Y) = H(X, Y) - H(Y) \quad (2.19)$$

kjer je

$$H(X, Y) = -\sum_x \sum_y p(x, y) \log(p(x, y))$$

povezana entropija,  $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$  pa povezana verjetnost. Indeks  $k$  smo zaradi prikladnosti opustili, pomembno je le, da sumiramo po celotnem območju zalog vrednosti naključnih spremenljivk  $X$  in  $Y$ . Sedaj lahko opredelimo splošno definicijo vzajemne informacije z izrazom [9]

$$\mathcal{I}(X, Y) = H(X) - H(X | Y) = \sum_x \sum_y p(x, y) \log\left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)}\right), \quad (2.20)$$

pri čemer smo upoštevali, da lahko  $p(x)$  zapišemo kot robno verjetnost  $p(x) = \sum_y p(x, y)$ .

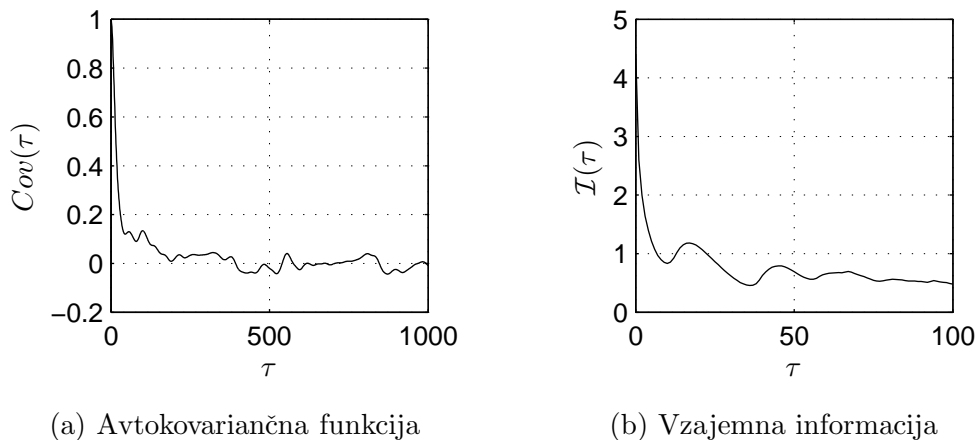
Za določitev časovnega zamika  $\tau$  nas zanima vzajemna informacija med  $s_n$  in  $s_{n-\tau}$ , ter seveda kako se spreminja v odvisnosti od časovnega zamika. V ta namen časovno vrsto  $s_n$  razdelimo na intervale, ter naredimo histogram. Verjetnost, da se  $s_n$  nahaja v  $i$ -tem intervalu

označimo s  $p(i) \equiv p_i$ , podobno naj  $p(j) \equiv p_j$  predstavlja verjetnost, da  $s_{n-\tau}$  pripada  $j$ -temu intervalu,  $p(i, j) \equiv p_{ij}$  pa predstavlja povezano verjetnost torej, da je  $s_n$  v  $i$ -tem in  $s_{n-\tau}$  v  $j$ -tem intervalu. Vzajemno informacijo med  $s_n$  in  $s_{n-\tau}$  v odvisnosti od časovnega zamika  $\tau$  sedaj zapišemo

$$\mathcal{I}(\tau) = \sum_i \sum_j p_{ij}(\tau) \log \left( \frac{p_{ij}(\tau)}{p_i p_j} \right). \quad (2.21)$$

Vzajemna informacija nam pove koliko informacije o vrednosti  $s_n$  imamo, če poznamo  $s_{n-\tau}$ . Za majhne  $\tau$  bo vzajemna informacija velika in obratno. Če sta  $s_n$  in  $s_{n-\tau}$  neodvisni je  $p_{ij} = p_i p_j$ , odkoder sledi  $\mathcal{I}(\tau) = 0$ , kar pomeni, da  $s_{n-\tau}$  ne vsebuje nobene informacije o  $s_n$ . Za optimalni časovni zamik izberemo  $\tau$ , kjer ima vzajemna informacija svoj prvi lokalni minimum.

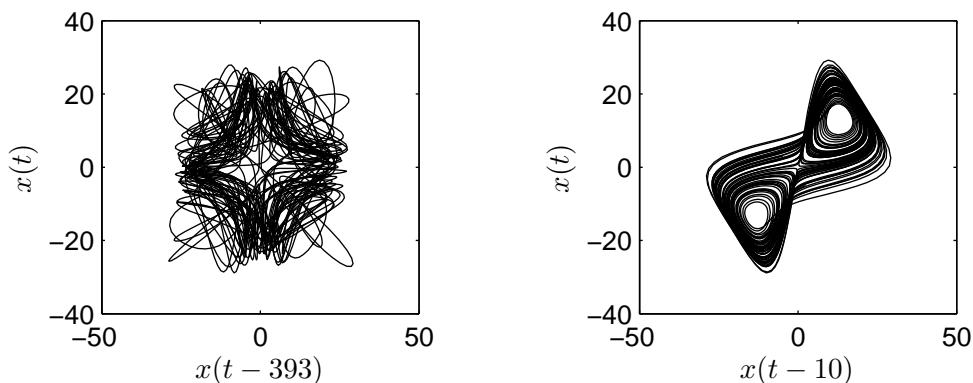
Slika (2.2) prikazuje avtokovariančno funkcijo in vzajemno informacijo časovne vrste  $x(t)$  Lorenz-ovega sistema. V poglavju (2.1.1) smo povedali, da za časovni zamik vzamemo tisto vrednost  $\tau$ , kjer ima avtokovariančna funkcija prvo ničlo, kar je v našem primeru pri  $\tau = 393$ . Druga možnost je, da za časovni zamik vzamemo vrednost  $\tau$ , kjer ima vzajemna informacija prvi lokalni minimum, torej za naš primer pri  $\tau = 10$ . Vidimo, da je izbira optimalnega



**Slika 2.2:** Določanje ustreznega časovnega zamika  $\tau$  za časovno vrsto  $x(t)$

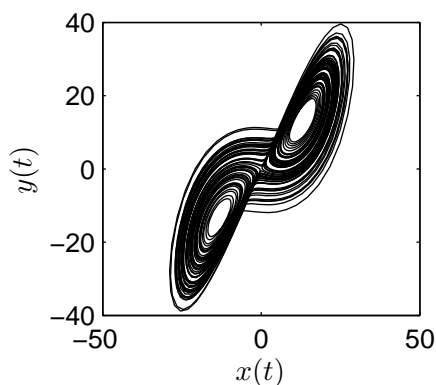
časovnega zamika z metodo avtokovariančne funkcije precej drugačna od časovnega zamika, kjer ima vzajemna informacija prvi lokalni minimum. Da bi se pravilno odločili kateri časovni zamik je pravi, so na slika (2.3) prikazani rekonstrukciji časovne vrste  $x(t)$  v dveh dimenzijah za oba časovna zamika, poleg pa še dvodimenzionalna projekcija originalnega Lorenz-ovega atraktorja. Na osnovi primerjave s projekcijo originalnega atraktorja (slika (2.3(c))) je očitno, da časovni zamik  $\tau = 393$  (slika (2.3(a))) ni primerna izbira za rekonstrukcijo Lorenz-ovega atraktorja iz časovne vrste  $x(t)$ , saj so točke preveč razpršene. Problem pri izbiri časovnega zamika  $\tau$  iz avtokovariančne funkcije je, da sta  $x(t)$  in  $x(t-\tau)$  le linearno neodvisni, nelinearne

odvisnosti pa z avtokovariančno funkcijo ne odkrijemo. Za določanje časovnega zamika je zato bolj priporočljivo uporabiti prvi lokalni minimum vzajemne informacije [7], kar je razvidno tudi iz slike (2.3(b)).



(a) Rekonstrukcija v dveh dimenzijah s časovnim zamikom  $\tau = 393$

(b) Rekonstrukcija v dveh dimenzijah s časovnim zamikom  $\tau = 10$



(c) Projekcija Lorenz-ovega atraktorja

**Slika 2.3:** Primerjava rekonstrukcije Lorenz-ovega atraktorja v dveh dimenzijah za časovna zamika  $\tau = 393$  in  $\tau = 10$ , ter prikaz dvodimenzionalne projekcije dejanskega Lorenz-ovega atraktorja

## 2.2 Določanje minimalne potrebne dimenzije vlaganja

Za rekonstrukcijo atraktorja moramo, poleg ustreznega časovnega zamika  $\tau$ , določiti tudi potrebno vložitevno dimenzijo. V ta namen bomo uporabili metodo *nepravih najbližjih sosedov* [8]. Kadar iz časovne vrste pravilno rekonstruiramo atraktor, se trajektorija ne seka, saj v nasprotnem primeru pogoj enoličnosti ni izpolnjen. Atraktor vložen v prostor s premajhno



dimenzijo vsebuje točke, ki so si blizu zaradi projekcije na prostor s premajhno dimenzijo in ne zaradi dinamike sistema.

Recimo, da časovno vrsto  $s_n$  z rekonstrukcijo vložimo v  $m$ -dimenzionalni fazni prostor, v katerem so točke opredeljene z vektorji

$$\underline{s}_n^m = (s_{n-(m-1)\tau}, s_{n-(m-2)\tau}, \dots, s_{n-\tau}, s_n)$$

in nato vsaki točki poiščemo najbližjega soseda

$$\underline{s}_n^{m,NN} = (s_{n'-(m-1)\tau}, s_{n'-(m-2)\tau}, \dots, s_{n'-\tau}, s_{n'}).$$

Indeks  $n'$  smo uporabili zato, da ne kršimo enoličnosti. Točka  $\underline{s}_n^{m,NN}$  je lahko v najbližji okolici točke  $\underline{s}_n^m$  zaradi dinamike sistema, lahko pa se je znašla v njeni okolici, ker  $m$  ni dovolj velik in je zato  $\underline{s}_n^{m,NN}$  zgolj projekcija. V naslednjem koraku povečamo dimenzijo vlaganja in vsaki točki ponovno poiščemo najbližjega soseda

$$\underline{s}_n^{m+1} = (s_{n-m\tau}, s_{n-(m-1)\tau}, \dots, s_{n-\tau}, s_n),$$

$$\underline{s}_n^{m+1,NN} = (s_{n'-m\tau}, s_{n'-(m-1)\tau}, \dots, s_{n'-\tau}, s_{n'}).$$

Kadar je točka  $\underline{s}_n^{m,NN}$  pravi sosed točke  $\underline{s}_n^m$ , kar je posledica dinamike, se razdalja med njima, ob povečanju dimenzije vložitvenega prostora, bistveno ne spremeni. Točka  $\underline{s}_n^{m,NN}$  ostane v bližnji okolici točke  $\underline{s}_n^m$ . V nasprotnem primeru, ko je točka  $\underline{s}_n^{m,NN}$  v bližini  $\underline{s}_n^m$  zaradi projekcije, se ta točka ob prehodu na večjo dimenzijo oddalji od  $\underline{s}_n^m$ . Kvadrat Evklidske razdalje med dvema točkama v  $m$ -dimenzionalnem prostoru je

$$R_m^2(n) = \sum_{k=1}^m [s_{n-(k-1)\tau} - s_{n'-(k-1)\tau}]^2, \quad (2.22)$$

v  $(m+1)$ -dimenzionalnem prostoru pa

$$R_{m+1}^2(n) = \sum_{k=1}^{m+1} [s_{n-(k-1)\tau} - s_{n'-(k-1)\tau}]^2 = R_m^2(n) + |s_{n-m\tau} - s_{n'-m\tau}|^2. \quad (2.23)$$

Kriterij za določanje nepravih najbližjih sosedov je opredeljen z razmerjem razdalj v  $(m+1)$  in  $m$  dimenzionalnem prostoru

$$\sqrt{\frac{R_{m+1}^2(n) - R_m^2(n)}{R_m^2(n)}} = \frac{|s_{n-m\tau} - s_{n'-m\tau}|}{R_m(n)}. \quad (2.24)$$

Če za par točk velja

$$\frac{|s_{n-m\tau} - s_{n'-m\tau}|}{R_m(n)} > \rho_r, \quad (2.25)$$

kjer je  $\rho_r$  mejna vrednost, je  $\underline{s}_n^{m,NN}$  nepravilni sosed točke  $\underline{s}_n^m$ , saj je v njeni bližini, ker je  $m$  premajhna dimenzija vložitvenega prostora. V praksi je  $15 \leq \rho_r \leq 30$  [4].

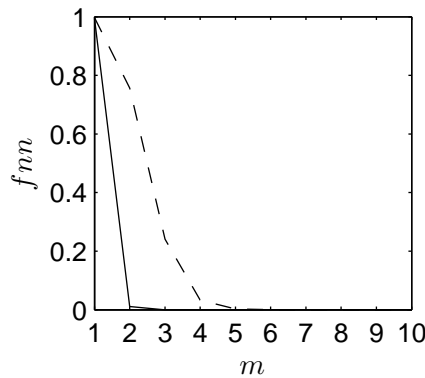
Poleg kriterija (2.25) je za računanje nepravilnih sosedov v višjih dimenzijah potreben še dodatni kriterij [8, 10].

$$\frac{|s_{n-m\tau} - s_{n'-m\tau}|}{R_a} > \rho_a, \quad (2.26)$$

kjer izberemo  $1 \leq \rho_a \leq 2$ ,  $R_a$  pa je standardna deviacija časovne vrste

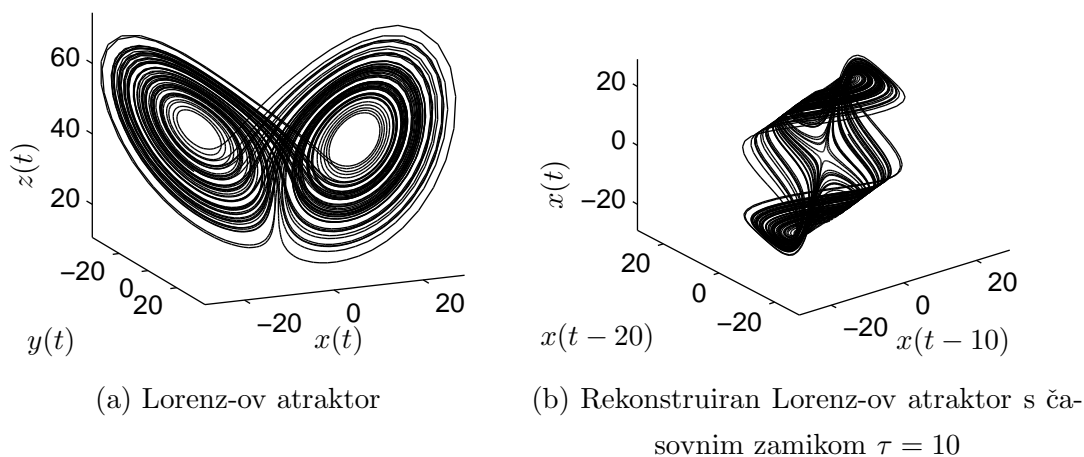
$$R_a = \left( \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (s_n - \langle s \rangle_n)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.27)$$

Označimo število nepravilnih sosedov z  $N_{fnn}$ , število vseh najbližjih sosedov pa naj bo  $N_{nn}$ . Dimenziji  $m = m_e$ , pri kateri delež nepravilnih najbližjih sosedov  $fnn = N_{fnn}/N_{nn}$  pade na nič, pravimo *minimalna potrebna dimenzija vložitvenega prostora*. Dimenzija  $m_e$  je torej minimalna potrebna dimenzija, da se trajektorija v rekonstruiranem faznem prostoru ne seka. Pri časovnih vrstah iz determinističnih dinamičnih sistemov bo  $fnn = 0$  za vse  $m \geq m_e$ , kar pa ne velja za šumne podatke. V odvisnosti od deleža šuma, ki je v signalu, se lahko zgodi, da  $fnn$  pade na nič pri večji dimenziji  $m$ , kot bi v primeru brez šuma, lahko sploh ne pade na nič, ali pa pri določenem  $m$  začne celo naraščati. Takšni primeri so prikazani v [8]. Poudarimo še, da je šum v kontekstu nelinearne analize časovnih vrst smatran, kot dinamični sistem z zelo veliko dimenzijo  $m_e$ . Uporabo metode nepravilnih najbližjih sosedov za našo časovno vrsto prikazuje slika (2.4). Prikazan je tudi vpliv dodanega šuma. Z metodo nepravilnih najbližjih



**Slika 2.4:** Delež nepravilnih najbližjih sosedov  $fnn$  za časovno vrsto  $x(t)$  Lorenz-ovega sistema (polna črta) in za isto časovno vrsto, zašumljeno s 5% šuma z enakomerno porazdelitvijo (črtna črta)

sosedov smo ugotovili, da je za rekonstrukcijo Lorenz-ovega atraktorja iz časovne vrste  $x(t)$  minimalna potrebna dimenzija vložitvenega prostora  $m_e = 3$ . Primerjava originalnega in rekonstruiranega atraktorja je prikazana na sliki (2.5). Oblikovno sta si prikazana atraktorja



**Slika 2.5:** Primerjava originalnega in rekonstruiranega Lorenz-ovega atraktorja

različna, vendar imata enake dinamske lastnosti, kar pomeni, da enakovredno predstavljata dinamske lastnosti sistema. Znano je, da je dimenzija Lorenz-ovega atraktorja  $d_A \approx 2.06$ . Po teoremu vlaganja je torej zadostna dimenzija  $m = 5 > 2d_A$ . V našem primeru smo ugotovili, da je dovolj že dimenzija  $m_e = 3$ . Povdarimo, da tega rezultata ne smemo pripisovati dejstvu, da je Lorenz-ov sistem opisan s tremi diferencialnimi enačbami, saj je povezava spremenljivk rekonstruiranega atraktorja z originalnimi spremenljivkami nelinearna [8].

## 2.3 Dimenzije

Poznavanje dimenzije atraktorja je pomembno za določitev dimenzije vložitvenega prostora. Omenili smo že, da ima atraktor lahko tudi fraktalno dimenzijo. Poleg omenjenega je dimenzija atraktorja *invariantna* količina, kar pomeni, da je neodvisna od koordinatnega sistema in začetnega pogoja. Omenili smo tudi, da vložitveni teorem zagotavlja, da je atraktor, rekonstruiran v prostoru z dovolj veliko dimenzijo ekvivalenten originalnemu atraktorju in imata enako dimenzijo. To nam omogoča, da iz časovne vrste, z rekonstrukcijo atraktorja, ugotovimo dimenzijo atraktorja dinamskega sistema, ki ga preučujemo. Za atraktor je opredeljena neskončna množica dimenzij, oziroma spekter dimenzij  $D_q$ ;  $q = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Dimenzija  $D_q$  je v splošnem fraktalna [11].

Za namen opredelitve dimenzije  $D_q$  si zamislimo atraktor v faznem prostoru, ki ga pokrijemo s hiperkockami z robom  $\epsilon$ . Število kock, potrebnih za prekritje, je odvisno od dolžine roba  $\epsilon$ . Verjetnost, da točka atraktorja leži v  $i$ -ti kocki ocenimo s  $p(i) = N_i/N_b$ , kjer je  $N_i$  število točk v  $i$ -ti kocki,  $N_b = N_b(\epsilon)$  pa je število nepraznih kock, potrebnih za pokritje.

Posplošena dimenzija je definirana z izrazom [11]

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \sum_{i=1}^{N_b(\epsilon)} p(i)^q}{\log \epsilon} \quad (2.28)$$

V praksi se največ uporabljajo dimenzije  $D_0$ ,  $D_1$  in  $D_2$ . Njihove vrednosti so si zelo blizu, zato navadno niti ne navedemo katero od teh dimenzij imamo v mislih. Med njimi velja relacija  $D_{q'} \leq D_q$ ;  $q' \geq q$ . Enakost velja, če je atraktor homogen, torej je  $p(i) = 1/N_b = konst.$  [11].

**Kapaciteta atraktorja** Pri  $q = 0$  dobi enačba (2.28) obliko

$$D_0 = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_b(\epsilon)}{\log \epsilon}, \quad (2.29)$$

s čimer je definirana *kapaciteta atraktorja*.

**Informacijska dimenzija** Pri  $q = 1$ , oziroma za  $\lim_{q \rightarrow 1}$ , dobimo s pomočjo L'Hospital-ovega pravila iz enačbe (2.28) izraz za *informacijsko dimenzijo*

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N_b(\epsilon)} p(i) \log p(i)}{\log \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-H(\epsilon)}{\log \epsilon}, \quad (2.30)$$

kjer je  $H(\epsilon)$  entropija, ki smo jo definirali z enačbo (2.18).

**Korelacijska dimenzija** Pri  $q = 2$  enačba (2.28) preide v definicijo za *korelacijsko dimenzijo*

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{N_b(\epsilon)} p(i)^2}{\log \epsilon}, \quad (2.31)$$

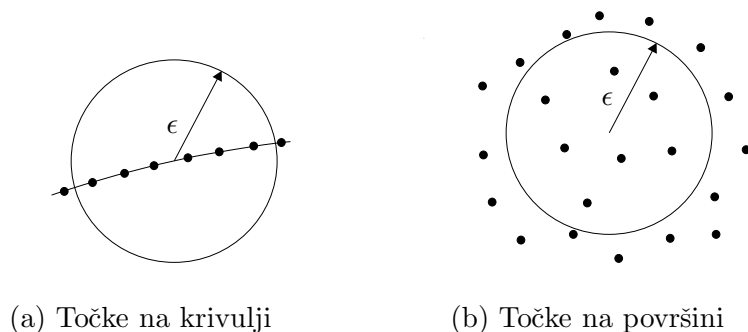
kjer  $p(i)^2$  predstavlja verjetnost, da dve naključno izbrani točki na atraktorju ležita v  $i$ -ti kocki, vsota  $\sum_{i=1}^{N_b(\epsilon)} p(i)^2$  pa predstavlja verjetnost, da dve poljubni točki ležita v isti kocki. Namesto pokrivanja atraktorja s kockami in računanja  $p(i)^2$  se v praksi izkaže, da raje izračunamo *korelacijski integral*. Za primer vektorjev v rekonstruiranem faznem prostoru korelacijski integral zapišemo

$$C(m, \epsilon) = \binom{N_v}{2}^{-1} \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{j=i+1}^{N_v} \Theta(\epsilon - \|\underline{s}_i - \underline{s}_j\|) = \frac{2}{N_v(N_v - 1)} \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{j=i+1}^{N_v} \Theta(\epsilon - \|\underline{s}_i - \underline{s}_j\|), \quad (2.32)$$

kjer je  $\Theta(x)$  Heaviside-ova funkcija

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0, \end{cases} \quad (2.33)$$

$N_v$  število točk rekonstruiranega atraktorja,  $\|\underline{x}_i - \underline{x}_j\|$  pa je Evklidska razdalja med  $\underline{x}_i$  in  $\underline{x}_j$ . Korelacijski integral prešteje vse pare točk v faznem prostoru, ki so medseboj oddaljene za manj kot  $\epsilon$ . Za točke enakomerno porazdeljene na krivulji (slika (2.6(a))) bo korelacijski integral  $C(\epsilon) \propto \epsilon^1$ , za točke enakomerno porazdeljene po površini (slika (2.6(b))) pa bo  $C(\epsilon) \propto \epsilon^2$ . Za objekte višjih dimenzij torej posplošimo  $C(\epsilon) \propto \epsilon^{D_2}$  in ponovno definiramo



**Slika 2.6:** Enakomerno porazdeljene točke

korelacijsko dimenzijo [7, 8]

$$D_2 = D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N_v \rightarrow \infty} \frac{\partial \log C(m, \epsilon, N_v)}{\partial \log \epsilon}. \quad (2.34)$$

Pri tem smo uvedli novo oznako za korelacijsko dimenzijo  $D$ , s čimer želimo poudariti, da se definicija (2.34) razlikuje od definicije (2.31). Za oceno korelacijske dimenzije se v praksi navadno uporablja enačba (2.34) in ne (2.31), za boljše rezultate pa enačbo (2.32) še rahlo priredimo [7]

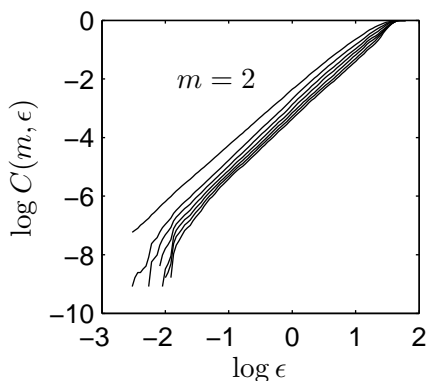
$$C(m, \epsilon) = \frac{2}{(N_v - n_{min})(N_v - n_{min} - 1)} \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{j=i+1+n_{min}}^{N_v} \Theta(\epsilon - \|\underline{x}_i - \underline{x}_j\|), \quad (2.35)$$

kjer je  $n_{min} \Delta t$  korelacijski čas, ki je praviloma večji od časovnega zamika  $\tau \Delta t$  pri katerem ima avtokovariančna funkcija prvo ničlo. S tem izločimo točke v faznem prostoru, ki so s posamezno točko časovno korelirane, torej neposredne slike posamezne točke v času nazaj in naprej.

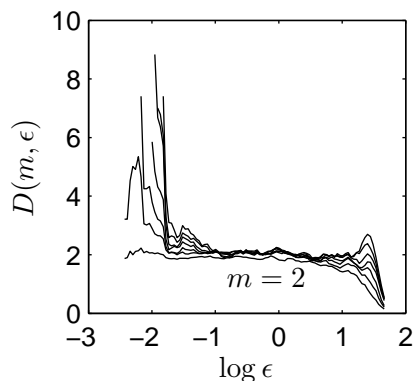
Opomnimo, da enačba (2.34) zaradi odvajanja dejansko predstavlja lokalno dimenzijo atraktorja. Poleg tega v izrazu za izračun korelacijske dimenzije, enačba (2.34), nastopajo limite, ki v praksi niso izvedljive, zato za oceno korelacijske dimenzije postopamo na sledeči način: najprej iz časovne vrste rekonstruiramo  $m$ -dimenzionalni fazni prostor za različne  $m$  in izračunamo korelacijske integrale po enačbi (2.35). Ker želimo najti območje skaliranja, to je kjer je  $C(m, \epsilon) \propto \epsilon^D$ , narišemo graf  $\log C(m, \epsilon)$  v odvisnosti od  $\log \epsilon$ . Sedaj nas zanimajo nakloni krivulj. Če nakloni krivulj na dovolj velikem območju vrednosti  $\epsilon$ ,

konvergirajo k neki vrednosti, lahko to vrednost uporabimo za oceno korelacijske dimenzije. Prva dimenzija  $m$ , pri katerem začnejo nakloni konvergirati predstavlja minimalno potrebno dimenzijo vložitvenega prostora  $m_e$ . Za dimenzijo  $m_e$  lahko vzamemo tudi prvo celoštevilčno dimenzijo, ki je večja od ocenjene korelacijske dimenzije. Opozoriti je potrebno, da je izračun korelacijskega integrala direkten po enačbi (2.35), ocena korelacijske dimenzije  $D$  pa je prepuščena naši presoji. Opisan postopek služi samo kot ocena, nikakor pa ne moremo te ocene enačiti z dejansko dimenzijo. Če bi oceno korelacijske dimenzije želeli opredeliti kot dejansko dimenzijo atraktorja, bi morali zagotoviti, da bi bila ta ocena invariantna, torej neobčutljiva na način merjenja časovna vrste, izbire koordinatnega sistema, ter načina izračuna ocene [7].

Korelacijski integrali v odvisnosti od  $\epsilon$  in  $m$  za obravnavano časovno vrsto  $x(t)$  so prikazani na sliki (2.7(a)), pripadajoče poteke lokalnih naklonov pa prikazuje slika (2.7(b)). Na sliki



(a) Korelacijski integrali; od zgoraj navzdol  $m = 2, \dots, 8$



(b) Pripadajoči poteki naklonov korelacijskih integralov; od spodaj navzgor  $m = 2, \dots, 8$

**Slika 2.7:** Prikaz korelacijskih integralov in njihovih naklonov za časovno vrsto  $x(t)$  Lorenz-ovega sistema pri različnih dimenzijah vlaganja  $m = 2, \dots, 8$

(2.7(a)) vidimo, da imajo krivulje pri  $m > 2$  na skali  $-1 < \log \epsilon < 0.4$  enak naklon, kar se na sliki (2.7(b)) na isti skali in za  $m > 2$  odraža kot približno vodoravna črta. Predno pa podamo oceno korelacijske dimenzije, najprej bolj podrobno pojasnimo sliko (2.7(b)). Na skali  $\log \epsilon \approx 1.5$  pade ocena dimenzije na nič, kar je posledica končne dimenzije atraktorja. V območju  $0.4 < \log \epsilon < 1.50$  vidimo, da se ocena dimenzije spreminja z  $m$ , na skali  $-1 < \log \epsilon < 0.4$  pa je ocena dimenzije konstantna za  $m > 2$ . Če skalo zmanjšamo na  $\log \epsilon < -1$  ocena dimenzije začne naraščati in je ponovno odvisna od  $m$ . Razlog za to je, da na tako majhni skali začne primanjkovati točk, ki bi bile oddaljene za manj kot  $\epsilon$ , zato so vrednosti

korelacijskih integralov statistično slabo opredeljene in kot take nesmiselne. Če bi imeli zašumljeno časovno vrsto, bi na skali šuma ravno tako zaznali naraščanje ocene dimenzije. V tem primeru točke niso urejene v neko podmnožico v faznem prostoru, ampak so naključno porazdeljene po celotnem prostoru, ki ga imajo na voljo, kar pomeni da je  $D(m, \epsilon) = m$  za vsak  $m$ .

Za oceno korelacijske dimenzije morajo biti nakloni konstantni za vse dimenzije  $m \geq m_e$  na območju skaliranja vsaj ene dekade. V našem primeru so nakloni konstantni za  $m \geq 3$  na območju  $-1 < \log \epsilon < 0.4$ . Zaradi relativno velikega območja skaliranja in konvergence krivulj  $D(m, \epsilon)$  lahko ocenimo dimenzijo malo nad dva, slika (2.7(b)), in jo pripišemo dejanski dimenziji Lorenz-ovega atraktorja. S tem smo pokazali, da za dani primer, lahko iz skalarne časovne vrste, z rekonstrukcijo in opisanim postopkom za oceno korelacijske dimenzije, pravilno ocenimo dimenzijo originalnega atraktorja.

Kljub temu obetavnemu rezultatu se moramo zavedati, da v primeru eksperimentalnih časovnih vrst ocena dimenzije navadno ni tako preprosta, predvsem zaradi prisotnosti šuma. Če tudi iz grafov korelacijskih integralov vidimo, da nakloni konvergirajo, se z računanjem lokalnih naklonov ta konvergenca izgubi in območja skaliranja, kot je recimo vidno na sliki (2.7(b)), ne zaznamo. V tem primeru iz grafov korelacijskih integralov sami ocenimo območje skaliranja, če seveda obstaja, in na tem območju poiščemo premico z enakim naklonom, kot ga imajo korelacijski integrali. Naklon te premice predstavlja oceno za korelacijsko dimenzijo.

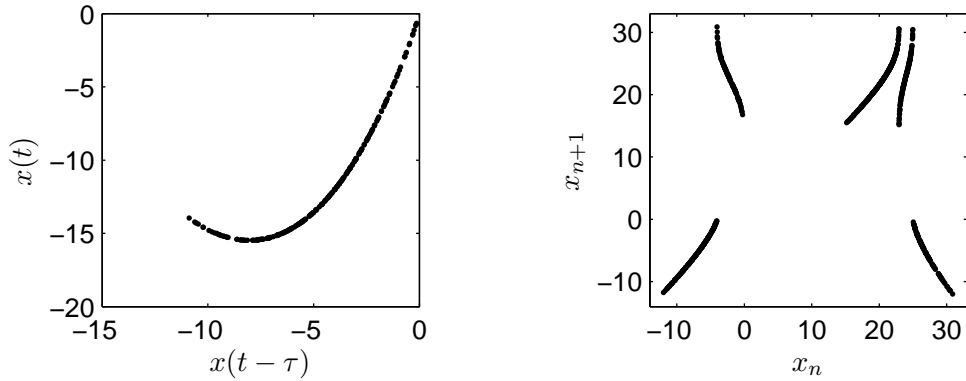
## 2.4 Poincaré -jeva sekcijska in določanje nestabilnih mejnih zank

Za karakterizacijo atraktorja se pogosto uporablja *Poincaré-jeva sekcijska*. Poincaré-jeva sekcijska je opredeljena z množico točk, ki predstavljajo sečišča trajektorije stanja sistema z navidezno ploskvijo v izbrani smeri. Za  $d$ -dimenzionalni dinamični sistem je navidezna sečna ploskev  $S$  opredeljena kot  $(d - 1)$ -dimenzionalna hiper-ploskev. Z opazovanjem točk na ploskvi  $S$  prevedemo zvezen dinamični sistem na diskretnega in zmanjšamo dimenzijo za ena. Preslikavi  $\underline{P} : S \rightarrow S$ , ki  $k$ -to presečišče  $\underline{s}_k \in S$ ;  $\forall k$  preslika v naslednje presečišče  $\underline{s}_{k+1} = \underline{P}(\underline{s}_k)$  pravimo *Poincaré-jeva preslikava* [6]. Indeks  $k$  predstavlja časovno zaporedje točk, ki sekajo ravnino  $S$  in ni nujno sorazmeren z zveznim časom trajektorije [7]. Čas, ki ga trajektorija porabi med dvema sečiščema se lahko spreminja glede na pot, ki jo trajektorija v tem času opravi, in glede na izbrani položaj ravnine. Primer Poincaré-jeve sekcije za, v treh dimenzijah, rekonstruiran Lorenz-ov sistem je prikazan na sliki (2.8(a)).

Poleg Poincaré-jeve sekcije obstajata še dva načina za prevedbo zveznega sistema na diskretnega. Pri prvem načinu v časovni vrsti poiščemo lokalne maksimume ali minimume in jih narišemo v medsebojni odvisnosti. Primer take sečne ploskve je na sliki (2.8(b)), kjer  $x_n$  predstavlja  $n$ -ti zaporedni lokalni maksimum. Če za vsako točko  $x_n$  poznamo preslikavo iz  $x_n$

v  $x_{n+1}$ , jo imenujemo *Lorenz-ova preslikava*. Pri tem opomnimo na razliko med Poincaré-jevo in Lorenz-ovo preslikavo. Poincarejeva preslika je  $(d-1)$ -dimenzionalna diskretna vektorska funkcija, Lorenzova preslikava pa je skalarna in ni odvisna od dimenzionalnosti  $d$  dinamičnega sistema.

Drugi primer prevedbe zveznega dinamičnega sistema v diskretnega je *stroboskopska preslikava*, ki se navadno uporablja pri periodično vzbujanih sistemih. Preslikavo dobimo tako, da s periodo vzbujanja opazujemo eno točko, bodisi v časovni vrsti ali v faznem prostoru.



(a) Poincaré-jeva sekcija pri izbrani sečni ploski z enačbo  $x(t-2\tau) = 0$

(b) Medsebojna odvisnost lokalnih maksimumov časovne vrste  $x(t)$

**Slika 2.8:** Prikaz dveh načinov postavitve Poincaré-jeve sečne ploskve

### 2.4.1 Določanje nestabilnih mejnih zank

Z opredelitvijo Poincaré-jeve preslikave zvezni dinamični sistem prevedemo v diskretnega. Seveda mora biti pri tem presečna ploskev postavljena tako, da zajame čim večji del atraktorja. S prevedbo zveznega dinamičnega sistema na diskretnega se sklenjene zanke prevedejo v fiksne točke, kar nam olajša iskanje in karakterizacijo nestabilnih sklenjenih zank. Zanka s periodo  $p$  je na Poincaré-jevi ploskvi  $S$  določena z zaporedjem točk  $\{\underline{s}_k \in S; k = 1, \dots, p\}$  tako, da velja

$$\underline{s}_{k+1} = \underline{P}(\underline{s}_k), \quad k = 1, \dots, p, \quad \underline{s}_{p+1} \equiv \underline{s}_1. \quad (2.36)$$

Preslikave  $\underline{P}$  običajno ne poznamo, zato jo je potrebno oceniti. Ocenimo jo z minimizacijo izraza [12]

$$\sum_{k=1}^p \|\underline{s}_{k+1} - \underline{P}(\underline{s}_k)\|^2, \quad \underline{s}_{p+1} \equiv \underline{s}_1. \quad (2.37)$$

Najenostavnejši algoritem za določitev komponent vektorske funkcije  $\underline{P}$  je *enostavno ne-linearano napovedovanje* [7]. Spomnimo se, da iz časovne vrste  $s_1, \dots, s_N$  lahko po enačbi



(2.12) rekonstruiramo vektorje  $\underline{s}_{(m-1)\tau+1}, \dots, \underline{s}_N$  v  $m$ -dimenzionalnem prostoru. Da bi lahko napovedali meritev za čas  $N + \Delta n$ , si za točko  $\underline{s}_N$  izberemo okolico  $\mathcal{U}_\epsilon(\underline{s}_N)$  z radijem  $\epsilon$ , velikostnega reda ločljivosti izmerjenih podatkov. Za vse točke  $\underline{s}_n \in \mathcal{U}_\epsilon(\underline{s}_N)$  poiščemo pripadajoče napovedi  $s_{n+\Delta n}$ . Napoved meritve ob času  $N + \Delta n$  je opredeljena s povprečjem napovedi  $s_{n+\Delta n}$

$$\hat{s}_{N+\Delta n} = \frac{1}{|\mathcal{U}_\epsilon(\underline{s}_N)|} \sum_{\underline{s}_n \in \mathcal{U}_\epsilon(\underline{s}_N)} s_{n+\Delta n}, \quad (2.38)$$

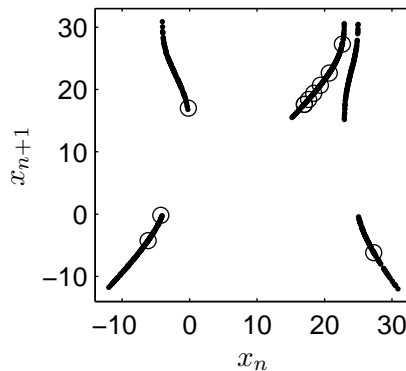
kjer  $|\mathcal{U}_\epsilon(\underline{s}_N)|$  predstavlja število točk v okolici  $\mathcal{U}_\epsilon(\underline{s}_N)$ . Z razširitvijo okolice  $\mathcal{U}_\epsilon$  na neskončno in upoštevanjem uteži glede na razdaljo med točkami, se enačba (2.38) posploši [12]

$$\hat{s}_{N+\Delta n} = \frac{\sum_{n \neq N} s_{n+\Delta n} w(\|\underline{s}_N - \underline{s}_n\|)}{\sum_{n \neq N} w(\|\underline{s}_N - \underline{s}_n\|)}, \quad (2.39)$$

kjer  $w()$  imenujemo *kernel*. Z izbiro  $w(\|\underline{s}_N - \underline{s}_n\|) = \Theta(\epsilon - \|\underline{s}_N - \underline{s}_n\|)$ , kjer je  $\Theta$  Heaviside-ova funkcija, definirana z enačbo (2.33), preidemo nazaj na enačbo (2.38).

Za reševanje enačbe (2.37) mora biti  $\underline{P}$  zvezna, zato ne moremo uporabiti lokalno konstantne napovedi po enačbi (2.38), ampak uporabimo enačbo (2.39), kjer izberemo  $w(\|\underline{s}_N - \underline{s}_n\|) = \exp(-\|\underline{s}_N - \underline{s}_n\|^2/2h^2)$  in  $\Delta n = 1$ . S parametrom  $h$  določamo stopnjo zveznosti  $\underline{P}$ .

Z minimizacijo izraza (2.37) lahko najdemo zaprte zanke s periodo  $p$ , če seveda obstajajo. Zanka je stabilna, če so vse lastne vrednosti Jacoby-jeve matrike preslikave  $\underline{P}$ , oziroma njene aproksimacije, po absolutni vrednosti manjše od ena. Za obravnavano časovno vrsto  $x(t)$  je primer nestabilne mejne zanke prikazan na sliki (2.9).



**Slika 2.9:** Nestabilna mejna zanka s periodo  $p = 10$ , največja lastna vrednost je 94.78

## 2.5 Testiranje nelinearnosti z nadomestnimi časovnimi vrstami

Z linearno analizo časovnih vrst lahko sklepamo samo o linearnih lastnostih procesa. Včasih je to zadostno, včasih pa ne in takrat je smiselno uporabiti nelinearne metode. Pri tem se moramo zavedati, da iz samega poteka časovne vrste ne moremo neposredno sklepati o njeni bodisi linearni ali nelinearni naravi. Zato bomo v nadaljevanju predstavili metodo za testiranje, ali je časovna vrsta odraz linearnega ali nelinearnega procesa.

Ideja je, da za dano originalno časovno vrsto tvorimo *nadomestne časovne vrste*, ki so linearne in iz vidika linearnosti ekvivalentne originalni časovni vrsti. Nato opredelimo neko nelinearno statistiko  $\lambda$  in jo izračunamo za vse časovne vrste. Če se statistika izračunana na originalni časovni vrsti značilno razlikuje od tistih, izračunanih na nadomestnih časovnih vrstah, potem lahko sklepamo, da je do odstopanja prišlo zaradi nelinearnih korelacij v originalni časovni vrsti, saj imajo linearne lastnosti vse vrste enake. Bolj formalno to idejo opišemo s *statističnim testiranjem hipotez*.

Postavimo ničelno hipotezo  $H_0$ , da je časovna vrsta rezultat stacionarnega linearnega naključnega procesa. Nato opredelimo *stopnjo značilnosti*  $\alpha = 0.05$ , verjetnost, da ničelno hipotezo zavrnemo, čeprav je dejansko pravilna. Nato zgeneriramo nadomestne časovne vrste, ki ustrezajo ničelni hipotezi in izračunamo statistike  $\lambda_{s,0}$  na originalni časovni vrsti in statistike  $\lambda_{s,i}$ ,  $i = 1, \dots, K$  na  $K$  nadomestnih časovnih vrstah. Za enostransko zavračanje ničelne hipoteze in stopnjo značilnosti  $\alpha$  moramo tvoriti  $1/\alpha - 1$  nadomestnih časovnih vrst. Ničelno hipotezo zavrnemo, če je  $\lambda_{s,0} < \lambda_{s,i}$ ,  $\forall i$ , oziroma  $\lambda_{s,0} > \lambda_{s,i}$ ,  $\forall i$ , odvisno od lege stopnje značilnosti. Pri tem lahko naredimo napako z verjetnostjo  $\alpha$ , da smo ničelno hipotezo zavrnili, čeprav je ne bi smeli. Enakovredno lahko z verjetnostjo  $1 - \alpha$  trdimo, da originalna časovna vrsta ne ustreza ničelni hipotezi, ampak je odraz nelinearnega procesa. V nadaljevanju povejmo na kakšen način generiramo nadomestne časovne vrste in katero statistiko bomo uporabili za testiranje.

Omenili smo, da morajo nadomestne časovne vrste imeti enake linearne lastnosti kot originalna, kar pomeni, da imajo enako srednjo vrednost, varianco in avtokorelacijsko funkcijo, oziroma frekvenčni spekter. Fourier-jeve transformacije originalne in nadomestnih časovnih vrst se torej lahko razlikujejo samo v fazah, amplitude pri posameznih frekvencah pa morajo biti enake. Fourier-jeva transformacija zveznega skalarne signala  $s(t)$  je definirana z izrazom [7]

$$\tilde{s}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i2\pi ft} dt. \quad (2.40)$$

Podobno je za diskretno časovno vrsto  $\{s_n; n = 1, \dots, N\}$  definirana diskretna Fourier-jeva

transformacija

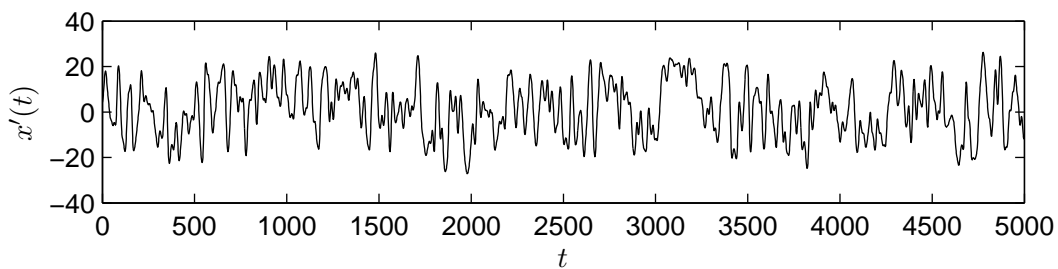
$$\tilde{s}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N s_n e^{-i2\pi kn/N} \quad k = 0, \dots, N. \quad (2.41)$$

Čas v fizikalnih enotah izrazimo z  $n\Delta t$ , frekvence pa z  $f_k = k/N\Delta t$ , kjer je  $\Delta t$  čas vzorčenja. S kvadratom absolutnih vrednosti Fourier-jeve transformiranke  $|\tilde{s}(f)|^2$  je definiran močnostni ali frekvenčni spekter. Za njegovo oceno iz končne diskretne časovne vrste uporabimo  $|\tilde{s}_k|^2$  [7].

Komponente Fourier-jeve transformacije  $\tilde{s}_k$  so kompleksna števila. Za tvorjenje nadomestnih časovnih vrst pomnožimo komponente  $\tilde{s}_k$  z naključnimi fazami  $\varphi_k$ , ki imajo enakomerno porazdelitev na intervalu  $[0, 2\pi)$ . Tako dobimo  $\tilde{s}'_k = \tilde{s}_k e^{i\varphi_k}$ , ki ima enako amplitudo kot  $\tilde{s}_k$ , samo faza je spremenjena za  $\varphi_k$ . Z inverzno diskretno Fourier-jevo transformacijo  $\tilde{s}'_k$  dobimo

$$s'_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \tilde{s}'_k e^{i2\pi kn/N}. \quad (2.42)$$

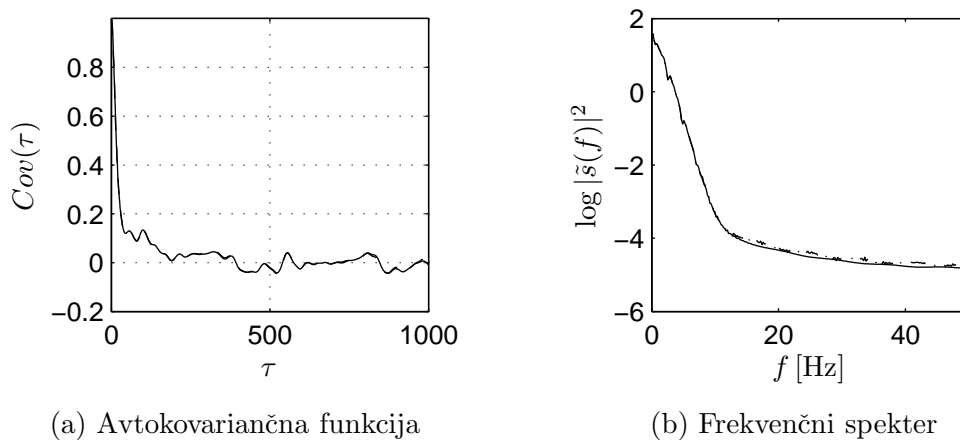
Časovna vrsta  $\{s'_n; n = 1, \dots, N\}$  je nadomestna časovna vrsta, sestavljena iz naključnih števil, ki imajo enak frekvenčni spekter, kot originalna časovna vrsta. Postopek ponovimo tolikokrat, da dobimo dovolj nadomestnih časovnih vrst, za testiranje ničelne hipoteze, pri izbrani stopnji značilnosti. Poleg enakih spektrov, metoda, ki smo jo uporabili za generiranje nadomestnih časovnih vrst, poskrbi tudi, da je verjetnostna porazdelitev amplitud nadomestnih vrst enaka kot pri originalni, zato nam v ničelni hipotezi ni potrebno predpisati, kakšno porazdelitev amplitud morajo nadomestne časovne vrste imeti [12, 13]. Na sliki (2.10) je prikazan primer nadomestne časovne vrste  $x'(t)$  za časovno vrsto  $x(t)$  Lorenz-ovega sistema (slika (2.1)). Slika (2.11) prikazuje primerjavo avtokovariančnih funkcij in frekvenčnih spek-



**Slika 2.10:** Nadomestna časovna vrsta za prvo spremenljivko  $x(t)$  Lorenz-ovega sistema

trov za časovni vrsti  $x'(t)$  in  $x(t)$ . Vidimo, da se avtokovariančna funkcija in frekvenčni spekter nadomestne časovne vrste skoraj povsem ujemata z originalno časovno vrsto.

Povejmo še nekaj o izbiri statistike  $\lambda_s$ . Navadno se za testno statistiko izbere oceno korelacijske dimenzije ali napako nelinearnega napovedovanja. Mi bomo za naš primer uporabili

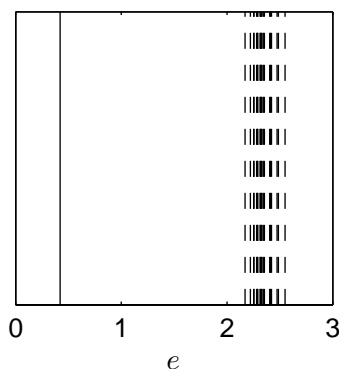


**Slika 2.11:** Primerjava avtokovariančne funkcije in frekvenčnega spektra za originalno časovno vrsto  $x(t)$  (polna črta) in nadomestno časovno vrsto  $x'(t)$  (črtkana črta)

slednjo, in sicer po enačbi

$$e = \sqrt{\langle (\hat{s}_n - s_n)^2 \rangle}, \quad (2.43)$$

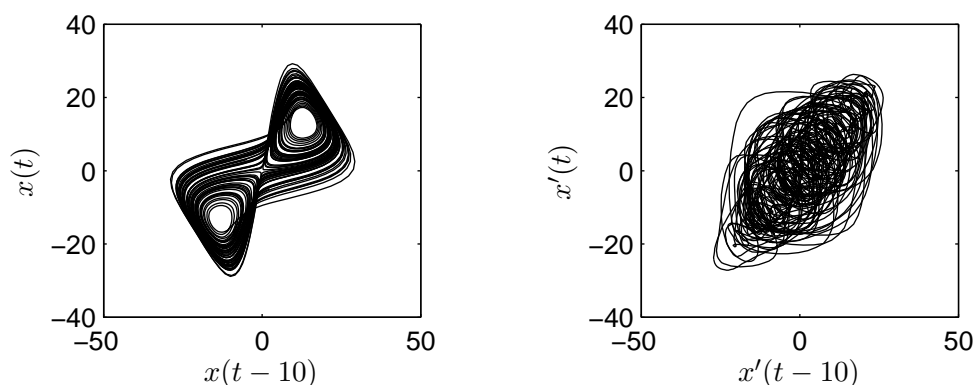
kjer je  $\hat{s}_n$  napoved za  $s_n$  in jo izračunamo po enačbi (2.38),  $\langle (\hat{s}_n - s_n)^2 \rangle$  pa je vzorčno povprečje kvadratičnih odstopanj vseh napovedanih vrednosti od pravih. Če je obravnavana časovna vrsta rezultat nelinearnega dinamičnega procesa, potem pričakujemo, da bo napaka pri nelinearnem napovedovanju, zaradi nelinearnih korelacij v vrsti, manjša, kot pri nadomestnih časovnih vrstah, ki vsebujejo le linearne korelacije. Na sliki (2.12) je prikazana napaka nelinearnega napovedovanja za naš primer originalne časovne vrste in njenih nadomestnih časovnih vrst. Napaka napovedovanja je za originalno časovno vrsto očitno manjša od vseh napak,



**Slika 2.12:** Primerjava napake pri nelinearnem napovedovanju za originalno časovno vrsto (polna črta) in devetnajst nadomestnih časovnih vrst (črtkana črta)

izračunanih na nadomestnih časovnih vrstah, zato sklepamo, da časovna vrsta izvira iz nelinearnega dinamičnega sistema. To je seveda pričakovan rezultat, saj vemo, da je Lorenz-ov sistem nelinearen.

Dodatno lahko hipotezo preverimo z rekonstrukcijo atraktorja iz nadomestne časovne vrste. Pri tem uporabimo enake parametre rekonstrukcije, kot pri originalni časovni vrsti. Rekonstrukcija atraktorja ene od nadomestnih časovnih vrst je prikazana na sliki (2.13(b)). Takoj opazimo, da sta sliki (2.13(a)) in (2.13(b)) očitno drugačni. Ker imata originalna in



(a) Atraktor rekonstruiran iz originalne časovne vrste

(b) Atraktor rekonstruiran iz nadomestne časovne vrste

**Slika 2.13:** Primerjava rekonstrukcij atraktorja z originalno in nadomestno časovno vrsto

nadomestna vrsta enake linearne lastnosti, ponovno sklepamo, da je do razlike prišlo zaradi nelinearnih značilnosti originalne časovne vrste.

## 2.6 Rekonstrukcija atraktorja z metodo glavnih osi

Včasih je klasična rekonstrukcija atraktorja po teoremu vlaganja vizualno slabo prezentativna, kar je lahko posledica prisotnosti šuma ali pa linearne korelacije podatkov v časovni vrsti, zaradi visoke frekvence vzorčenja [7]. V tem primeru si lahko pomagamo z linearno statistično metodo imenovano *metoda glavnih osi* ali *PCA metoda* (angl. *principal components analysis*). Ker je metoda PCA linearna, se invariantne lastnosti rekonstruiranega atraktorja pod njenim vplivom ne spremenijo. Ideja te metode je, da rekonstruirano časovno vrsto predstavimo v ortogonalnem koordinatnem sistemu glavnih osi, v katerem je variabilnost točk projekcije rekonstruirane časovne vrste na ta koordinatni sistem vzdolž posameznih osi največja. Os vzdolž največje variabilnosti se imenuje prva glavna os. S tem neposredno povečamo razmerje signala proti šumu. Za določitev glavnih osi nas najprej zanima kako so

točke razporejene v rekonstruiranem koordinatnem sistemu. Zato izračunamo kovariančno matriko točk v rekonstruiranem faznem prostoru. Iz časovne vrste  $s_1, \dots, s_N$  najprej rekonstruiramo  $m$ -dimenzionalne vektorje  $\underline{s}_{(m-1)\tau+1}, \dots, \underline{s}_N$ . Naj bo  $\langle s_i \rangle$  vzorčno povprečje elementov  $i$ -tega rekonstruiranega vektorja. Sedaj tvorimo nove vektorje  $\underline{s}_{K,i}$  tako, da elementom rekonstruiranih vektorjev odštejemo pripadajoče vzorčno povprečje. Tako dobljeni  $i$ -ti vektor ima obliko

$$\underline{s}_{K,i} = (s_{i-(m-1)\tau} - \langle s_i \rangle, s_{i-(m-2)\tau} - \langle s_i \rangle, \dots, s_{i-\tau} - \langle s_i \rangle, s_i - \langle s_i \rangle). \quad (2.44)$$

Vektorje  $\underline{s}_{K,i}$  uredimo v  $(N - (m - 1)\tau) \times m$  matriko

$$S_K = \begin{bmatrix} \underline{s}_{K,(m-1)\tau+1} \\ \vdots \\ \underline{s}_{K,i} \\ \vdots \\ \underline{s}_{K,N} \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

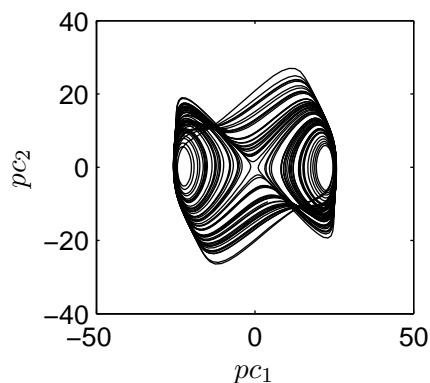
Kovariančno matriko točk v rekonstruiranem prostoru sedaj definiramo z izrazom

$$K = \frac{1}{m-1} S_K S_K^T, \quad (2.46)$$

kjer je  $S_K^T$  transponirana matrika matrike  $S_K$ . Kovariančna matrika  $K$  ima dimenzijo  $m \times m$  in je simetrična. Njeni diagonalni elementi so variance elementov posameznih vektorjev  $\underline{s}_{(m-1)\tau+1}, \dots, \underline{s}_N$ . Ker je matrika  $S_K S_K^T$  simetrična so njeni lastni vektorji ortogonalni in jo lahko zapišemo v obliki  $S_K S_K^T = E \Lambda E^T$ , kjer je  $E$  matrika normiranih lastnih vektorjev matrike  $S_K S_K^T$ ,  $\Lambda$  pa je diagonalna matrika pripadajočih lastnih vrednosti. Glavne osi rekonstruiranega faznega prostora so določene z lastnimi vektorji matrike  $S_K S_K^T$ , njene lastne vrednosti pa so sorazmerne variabilnosti točk vzdolž posameznih glavnih osi [14]. Prva glavna os je določena z lastnim vektorjem z največjo lastno vrednostjo, drugo glavno os določa lastni vektor z drugo največjo lastno vrednostjo itd. Majhne lastne vrednosti pomenijo majhne variance točk v rekonstruiranem faznem prostoru, kar pomeni, da so te smeri dinamsko manj zanimive, zato jih lahko zanemarimo. Dostikrat se izkaže, da je dovolj, če obravnavamo samo prvih nekaj glavnih osi, ki opišejo npr. 90% variabilnosti točk v faznem prostoru. Neupoštevanje preostalih glavnih osi deluje kot filtriranje, saj je vzdolž osi z majhno variabilnostjo razmerje signala proti šumu majhno, posledično pa zmanjšamo tudi potrebno dimenzijo vložitvenega prostora. Projekcija rekonstruiranih vektorjev na glavne osi se večinoma uporablja za vizualizacijo, filtriranje in zmanjševanje dimenzionalnosti podatkov, lahko pa PCA uporabimo tudi za nadaljno analizo namesto običajnih rekonstruiranih vektorjev [12].

Rezultat uporabe PCA metode na rekonstruiranih vektorjih je odvisen od izbranih parametrov rekonstrukcije  $\tau$  in  $m$ . Za potrebe filtriranja je priporočljivo  $\tau$  izbrati manjši, kot

sicer za običajno rekonstrukcijo,  $m$  pa nekoliko večji. Priporočljivo je eksperimentiranje [12]. Primer projekcije rekonstruiranega Lorenz-ovega atraktorja na prvi dve glavni osi  $pc_1$  in  $pc_2$  je prikazan na sliki (2.14).



**Slika 2.14:** Projekcija rekonstruiranega Lorenz-ovega atraktorja na prvi dve glavni osi, s čimer zajamemo 95% variabilnosti; za PCA smo uporabili  $\tau = 10$  in  $m = 3$

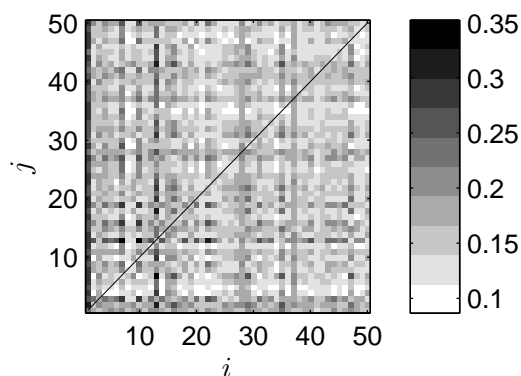
## 2.7 Nelinearni test stacionarnosti

Enostavna metoda nelinearnega napovedovanja, enačba (2.38), se je izkala za zelo uporabno. Najprej smo jo uporabili pri iskanju nestabilnih mejnih zank, nato pa kot statistiko za testiranje nelinearnosti. Sedaj bomo predstavili še en način njene uporabe, in sicer za testiranje stacionarnosti časovne vrste [15].

Za oceno dimenzije atraktorja ali Ljapun-ovih eksponentov na osnovi rekonstrukcije atraktorja je potrebno zagotoviti stacionarnost časovne vrste. Stacionarnost namreč pomeni, da se dinamika procesa s časom ne spreminja in takrat ima ocena dimenzije atraktorja ali njegovih Ljapun-ovih eksponentov smisel, v nasprotnem primeru, ko se dinamske lastnosti procesa spreminjajo, so te ocene vprašljive, izgubijo fizikalni pomen in jih nikakor ne smemo enačiti, kot karakteristike atraktorja opazovanega dinamskega procesa.

Poleg znanih linearnih kriterijev za testiranje stacionarnosti, ki pa so pri eksperimentalnih podatkih lahko nemalokrat nezadostni [7], je v primeru analize nelinearnih časovnih vrst smiselno uporabiti nelinearni test. Osnovna ideja pri tem testu stacionarnosti je, da izmerjeno skalarno časovno vrsto razdelimo na časovne intervale  $\mathcal{S}_i$ ,  $i = 1, \dots, N_I$ , ki morajo biti dovolj dolgi, recimo  $N_s = N/N_I \approx 500$  [7]. Če je časovna vrsta nestacionarna, potem si lahko predstavljamo, da bo napoved za podatke v intervalu  $\mathcal{S}_j$  s podatki iz intervala  $\mathcal{S}_i$  različna za različne pare intervalov. Za napoved  $j$ -tega intervala s podatki iz  $i$ -tega intervala za

vsako točko v  $j$ -tem intervalu izračunamo napoved po enačbi (2.38) s tem, da morajo točke za napoved pripadati  $i$ -temu intervalu. Dejanske vrednosti podatkov  $j$ -tega intervala nam nato služijo kot testni podatki, da lahko po enačbi (2.43) izračunamo napako napovedi. Opisani postopek ponovimo za vse možne pare intervalov. Če je napaka napovedi za nek določen par intervalov  $i, j$  značilno drugačen od povprečja, potem je očitno dinamika v  $i$ -tem intervalu drugačna kot v  $j$ -tem, oziroma pravimo, da je  $i$ -interval slab model za  $j$ -tega (iz slednjega tudi sledi, da so napake napovedi za pare intervalov  $i = j$  praviloma manjše od ostalih). Za primer obravnavane Lorenz-ove časovne vrste so napake križnega napovedovanja prikazane na sliki (2.15). Vidimo, da so napake napovedi relativno nizke in praktično za vse



**Slika 2.15:** Napake križnega napovedovanja za rekonstruiran Lorenz-ov sistem; uporabili smo 50000 točk dolgo časovno vrsto in jo razdelili na 50 intervalov; parametri rekonstrukcije so  $\tau = 10$  in  $m = 3$

pare približno enake. Na osnovi tega lahko trdimo, da časovna vrsta izvira iz stacionarnega procesa.



## Poglavje 3

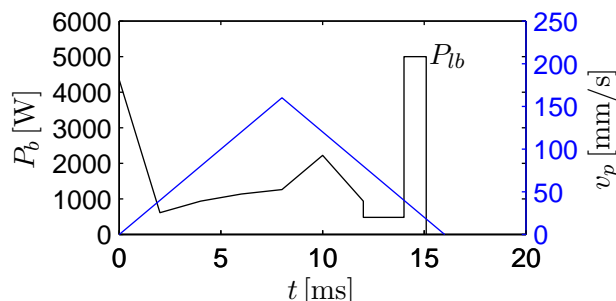
# Eksperimentalni sistem in časovne vrste

V tem poglavju bomo opisali proces laserskega tvorjenja kapljic in predstavili nekatere probleme na katere naletimo pri zaporednem tvorjenju kapljic. Predstavili bomo eksperimentalni sistem, izvedbo poiskusov in način tvorjenja časovnih vrst.

### 3.1 Proces laserskega tvorjenja kapljic

Pri laserskem tvorjenju kapljic (LTK) usmerimo laserski žarek v konec žice in jo stalimo. Staljeni material se pod vplivom sil površinske napetosti in sile teže oblikuje v kapljico, ki jo nato s pomočjo dodatnega bliska ločimo od žice. Za doseg željene velikosti kapljice žico med procesom tvorjenja kapljice podajamo. Pri izbranih parametrih podajanja žice je glavni kontrolni parameter procesa potek moči laserskega bliska. Na sliki (3.1) je prikazan primer časovnega poteka moči laserskega bliska in hitrost podajanja žice, ki smo ju uporabili za tvorjenje posamezne kapljice iz nikljeve žice premera 0.6 mm. Za določitev poteka moči je bil predhodno razvit numerični model laserskega segrevanja gibajoče se žice [1]. Iz časovnega poteka moči laserskega bliska je razvidno da se proces LTK izvaja v dveh fazah, in sicer tvorjenje viseče kapljice in nato ločitev kapljice od žice. S prvim delom bliska ( $t < 12$  ms) tvorimo visečo kapljico. Nato žico v času  $12 \text{ ms} \leq t < 14 \text{ ms}$  še nekoliko pomaknemo navzdol, s čimer zagotovimo ustrezno lego gorišča laserskega žarka na žici. Drugi del laserskega bliska ( $14 \text{ ms} \leq t \leq 15.2 \text{ ms}$ ) je kratek ločilni blisk višje moči  $P_{lb}$ , ki na vratu kapljice povzroči nastanek uparjalne kapilare. Zaradi intenzivnega uparjanja materiala nastane nadtlak, ki povzroči ločitev kapljice [16, 17].

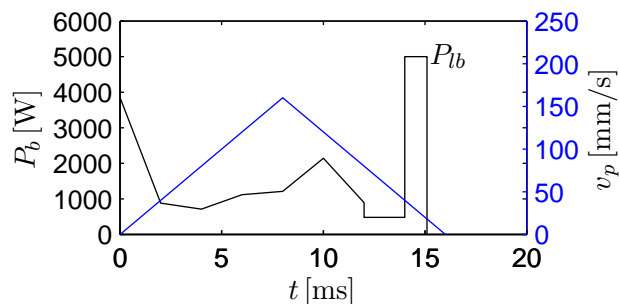
S poznavanjem parametrov laserskega bliska in parametrov podajanja žice, je proces tvorjenja posameznih kapljic zelo ponovljiv. Problemi nastopijo pri zaporednem tvorjenju



**Slika 3.1:** Časovni potek moči lasersega bliska za tvorjenje posamezne kapljice in hitrost podajanja žice

večih kapljic na sekundo. Razlika med tvorjenjem posameznih kapljic in zaporednim tvorjenjem kapljic je v začetnem stanju žice, predvsem temperature žice pred tvorjenjem naslednje kapljice. Pri tvorjenju posameznih kapljic je začetna temperatura pred tvorjenjem nove kapljice vedno enaka temperaturi okolice. V nasprotju pa je pri zaporednem tvorjenju kapljic začetna temperatura žice pred tvorjenjem naslednje kapljice vedno drugačna, vsaj dokler proces ne pride v stacionarno stanje, in je odvisna od energije laserskih bliskov in pogostosti tvorjenja kapljic.

Ugotovljeno je bilo, da z laserskim bliskom, ki zagotovi ponovljivost za tvorjenje posamezne kapljice, ne moremo uspešno tvoriti zaporedja kapljic [1]. Na osnovi modela so bili z optimizacijo parametrov laserskega bliska določeni časovni poteki moči laserskih bliskov za različne pogostosti zaporednega tvorjenja kapljic. Kot prvi laserski blisk je bil uporabljen blisk za tvorjenje posamezne kapljice, slika (3.1). Potek moči in število naslednjih bliskov za doseg stacionarnega stanja začetne temperature konca žice je v splošnem odvisno od pogostosti zaporednega tvorjenja kapljic. Če predpostavimo, da po dveh bliskih dosežemo stacionarno stanje procesa, so vsi nadaljnji bliski enaki drugemu [1]. Ob omenjeni predpostavki je potek moči laserskega bliska za zaporedno tvorjenje kapljic s pogostostjo 3 Hz prikazan na sliki (3.2). Poiskusi zaporednega LTK so pokazali, da je proces zaporednega tvorjenja kapljic, kljub upoštevanju optimalnega začetnega in nadaljnjih bliskov, precej nezanesljiv, kar se odraža v neponovljivosti odleta visečih kapljic. Sklepamo, da je eden od razlogov za to neustrezen vnos energije, oziroma predpostavka, da stacionarnost procesa dosežemo po dveh bliskih. Drugi razlog pa je domnevno v neustreznem pozicioniranju začetne lege žice. V ta namen je bil izdelan sistem za krmiljenje vnosa toplote in začetne lege žice [2]. Uvodni poiskusi so pokazali, da uporaba krmiljenja značilno izboljša ponovljivost procesa. Vpliv krmiljenja

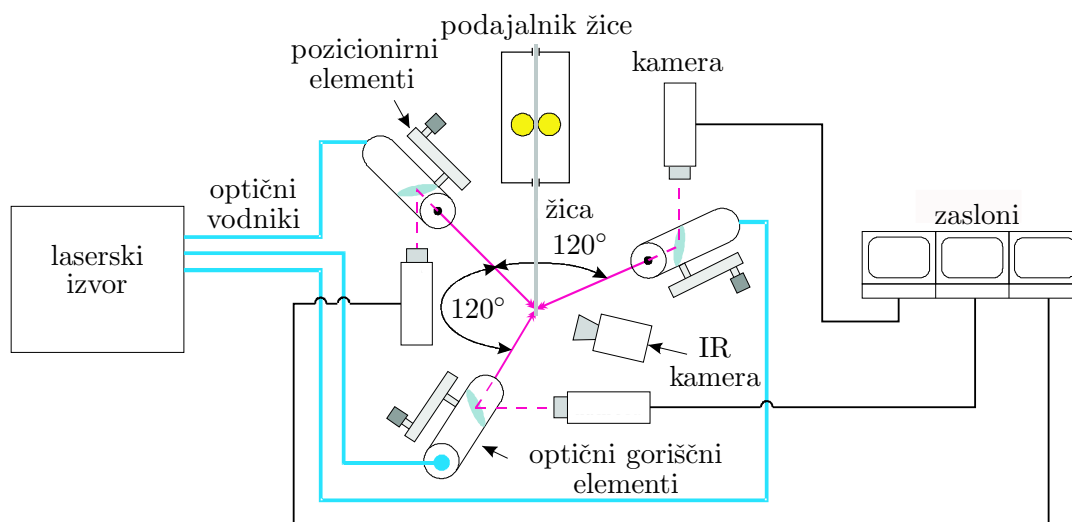


**Slika 3.2:** Časovni potek bliska za tvorjenje kapljic s pogostostjo 3 Hz in hitrosti podajanja žice

posameznih spremenljivk na proces pa podrobneje še ni bil raziskan.

## 3.2 Eksperimentalno mesto

Za proces LTK je bilo razvitih več sistemov. V nalogi smo uporabili sistem pri katerem kapljico tvorimo s pomočjo treh laserskih žarkov. Eksperimentalni sistem je shematsko prikazan na sliki 3.3. Poglavitni deli sistema so Nd:YAG bliskovni laserski izvor, optični



**Slika 3.3:** Shema eksperimentalnega sistema za LTK s tremi žarki [2]

vodniki, optični goriščni elementi skupaj s pozicionirnim mehanizmom, podajalnik žice in IR

kamera.

Nd:YAG laserski izvor služi kot generator laserskih bliskov v infrardečem območju spektra, valovne dolžine  $\lambda = 1064 \text{ nm}$ . Preko računalnika lahko časovni potek moči laserskega bliska določimo poljubno s časovnim korakom  $0.1 \text{ ms}$  in razmakom moči  $40 \text{ W}$ . Tvorimo lahko laserske bliske z maksimalno frekvenco  $\nu = 300 \text{ Hz}$  in povprečno močjo  $\bar{P} = 0.25 \text{ kW}$ . Minimalna moč laserskega bliska je  $P_{b,min} = 0.48 \text{ kW}$ , maksimalna moč pa je  $P_{b,max} = 8 \text{ kW}$ . Čas trajanja bliska je omejen med  $t_{min} = 0.3 \text{ ms}$  in  $t_{max} = 20 \text{ ms}$ . Žico segrevamo s tremi žarki enakih moči. Žarki so z optičnimi elementi usmerjeni v vodoravni ravnini pravokotno na os žice. Med seboj so kotno ekvidistantno oddaljeni tako, da so laserski žarki enakomerno porazdeljeni po obodu žice. Goriščna razdalja izstopne leče je  $f_g = 100 \text{ mm}$ , premer laserskega žarka v gorišču pa znaša  $d_f = 0.4 \text{ mm}$ . Za natančno pozicioniranje žice in laserskega žarka na njej, si pomagamo s kamerami, ki so nameščene na optične goriščne elemente. Za podajanje žice med procesom tvorjenja kapljice skrbi podajalnik žice s krmilnikom. Največji pospešek podajalnika je  $a_{max} = 20 \text{ m/s}^2$ , največja hitrost podajanja žice je  $v_{p,max} = 0.3 \text{ m/s}$ , velikost koraka podajanja pa je  $z = 3.1 \text{ }\mu\text{m}$ . Krmilnik podajalnika uporabimo tudi za proženje laserskih bliskov, s čimer zagotovimo časovno usklajenost podajalnika žice in laserskega izvora. Za karakterizacijo procesa LTK smo uporabili hitro IR kamero, ki zajema sliko pri valovnih dolžinah  $3.5 \text{ }\mu\text{m} \leq \lambda \leq 5 \text{ }\mu\text{m}$ .

### 3.3 Izvedba poiskusov in tvorjenje časovnih vrst

Dosedanje raziskave vpliva parametrov procesa so bile osredotočene predvsem na optimizacijo parametrov laserskega bliska za tvorjenje viseče kapljice. Parametri ločilnega bliska, trajanje in moč, so bili določeni na osnovi potrebnih pogojev za inicializacijo uparjalne kapilare. Analiza vpliva parametrov ločilnega laserskega bliska na proces zaporednega tvorjenja kapljic še ni bila opravljena. Zato smo se odločili, da naredimo poiskuse s katerimi bi okarakterizirali vpliv moči ločilnega laserskega bliska na proces zaporednega laserskega tvorjenja kapljic.

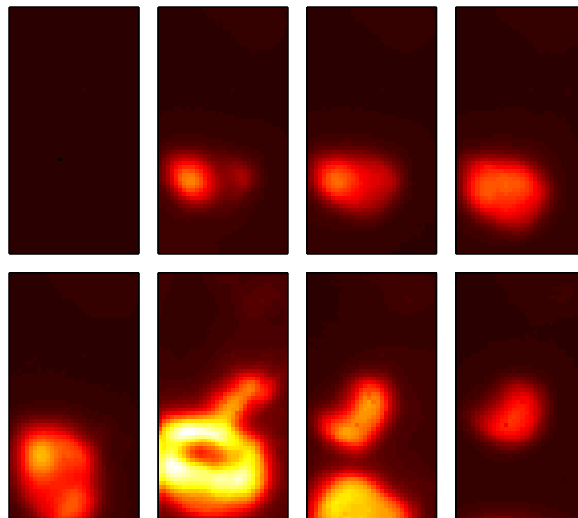
Da bi raziskali vpliv moči laserskega bliska smo izvedli poiskuse laserskega tvorjenja kapljic pri različnih močeh ločilnega laserskega bliska, del bliska za tvorjenje viseče kapljice pa je ostal nespremenjen. Kapljice smo tvorili s pogostostjo  $3 \text{ Hz}$ . Pri tem smo uporabili laserski blisk, prikazan na sliki (3.2), zaradi enostavnosti pa smo izbrali vse bliske enake. Poiskuse smo izvedli za moči ločilnih laserskih bliskov  $P_b = 0 \text{ W}, 520 \text{ W}, 1000 \text{ W}, 1520 \text{ W}, \dots, 7520 \text{ W}, 8000 \text{ W}$ . Gorišča laserskih žarkov smo odmaknili od žice za  $3 \text{ mm}$ . Kapljice smo tvorili iz nikljeve žice premera  $0.6 \text{ mm}$ . Da med procesom LTK ne pride do oksidacije, smo preko šobe soosno dovajali zaščitni plin argon s pretokom  $8 \text{ l/min}$ , slika (3.4).

Značilna spremenljivka pri procesu je temperatura žice, zato smo za karakterizacijo upora-



**Slika 3.4:** Prikaz dovoda zaščitnega plina

bili hitro kamero, ki zaznava IR sevanje. Na sliki (3.5) vidimo primer IR posnetka, ki prikazuje nastajanje in ločitev kapljice od žice. Hitrost zajemanja slike je odvisna od velikosti polja



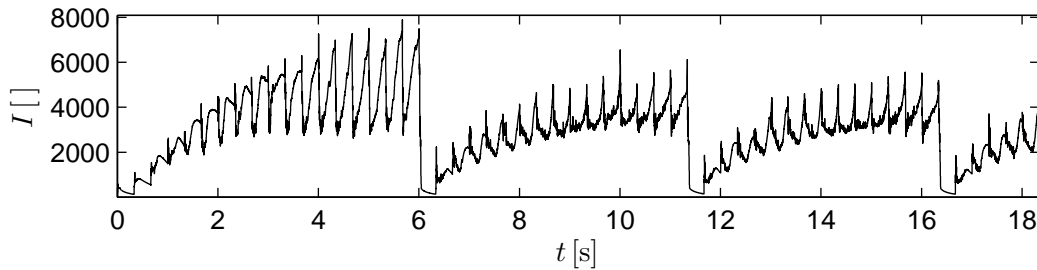
**Slika 3.5:** Prikaz IR posnetka nastanka in ločitve kapljice

tipala IR kamere in integracijskega časa posamezne slike. Velikost polja tipala smo nastavili na  $(U \times V) = 64 \times 32$  točk, integracijski čas pa na 0.04 ms. S temi nastavitvami dosežemo v povprečju 3147 slik na sekundo. IR posnetki predstavljajo časovni potek temperaturnega polja konca žice, katerih analiza je zahtevna. Za poenostavitev karakterizacije in nadaljnje analize procesa iz IR posnetkov tvorimo skalarne časovne vrste. Za karakterizacijo smo

uporabili povprečno vrednost celotnega polja IR posnetka [1, 2]

$$I(t) = \frac{1}{UV} \sum_{u=1}^U \sum_{v=1}^V I_{u,v}(t), \quad (3.1)$$

kjer je  $I_{u,v}$  vrednost IR signala  $(u, v)$ -te točke. Povprečno vrednost IR signala izračunamo na vseh IR posnetkih, s čimer dobimo časovno vrsto  $I(t)$  povprečne vrednosti IR signala. Kompleksni proces zaporednega laserskega tvorjenja kapljic tako predstavimo s skalarno časovno vrsto, ki opisuje časovni potek povprečne temperature konca žice. Primer tvorjene časovne vrste pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 0 \text{ W}$  je prikazan na sliki (3.6). Iz slike je takoj na začetku



**Slika 3.6:** Časovna vrsta pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 0 \text{ W}$

razviden naraščajoč trend signala  $I(t)$ , kar predstavlja obviselo kapljico. Iz IR posnetkov je razvidno, da volumen kapljice raste. Posamezni izraziti vrhovi signala so odraz periodičnega obsevanja konca žice z laserskimi bliski. Signal se ob času  $t \approx 6 \text{ s}$  sunkovito zmanjša, kar je posledica odleta kapljice. Z nadaljnjimi laserskimi bliski kapljica ponovno visi na koncu žice in raste, zato začne signal spet naraščati, dokler se kapljica ob času  $t \approx 11.5 \text{ s}$  ponovno ne loči od žice.

Pregled vseh izmerjenih časovnih vrst za posamezne moči ločilnih laserskih bliskov je prikazan v dodatku A.

## Poglavje 4

# Analiza procesa na osnovi časovnih vrst

Proces laserskega tvorjenja kapljic posredno opišemo s časovnimi vrstami, ki smo jih tvorili iz IR posnetkov pri različnih močeh ločilnega laserskega bliska. Iz potekov časovnih vrst je razvidno, da moč ločilnega bliska vpliva na obliko časovne vrste. V nadaljevanju je vpliv moči ločilnega laserskega bliska okarakteriziran na osnovi časovnih vrst. Iz rezultatov uvodne analize časovnih vrst je razvidno, da v odvisnosti od moči ločilnega laserskega bliska nastopijo tri značilna obnašanja procesa zaporednega laserskega tvorjenja kapljic. Obnašanje procesa pri izbranih močeh ločilnega bliska je nato okarakterizirano na osnovi nelinearne analize časovnih vrst.

### 4.1 Uvodna analiza časovnih vrst

V tem poglavju podamo pregled nekaj osnovnih statistik časovnih vrst v odvisnosti od moči ločilnega laserskega bliska. Kot statistike uporabimo vzorčno srednjo vrednost časovne vrste, varianco, ter koeficient poševnosti in sploščenosti.

Srednja vrednost časovne vrste  $\{s_n; n = 1, \dots, N\}$  je določena z izrazom

$$\langle s \rangle_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s_n, \quad (4.1)$$

varianca pa z

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (s_n - \langle s \rangle_n)^2, \quad (4.2)$$

kjer je  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$  standardna deviacija časovne vrste. Koeficient poševnosti je opredeljen z

izrazom

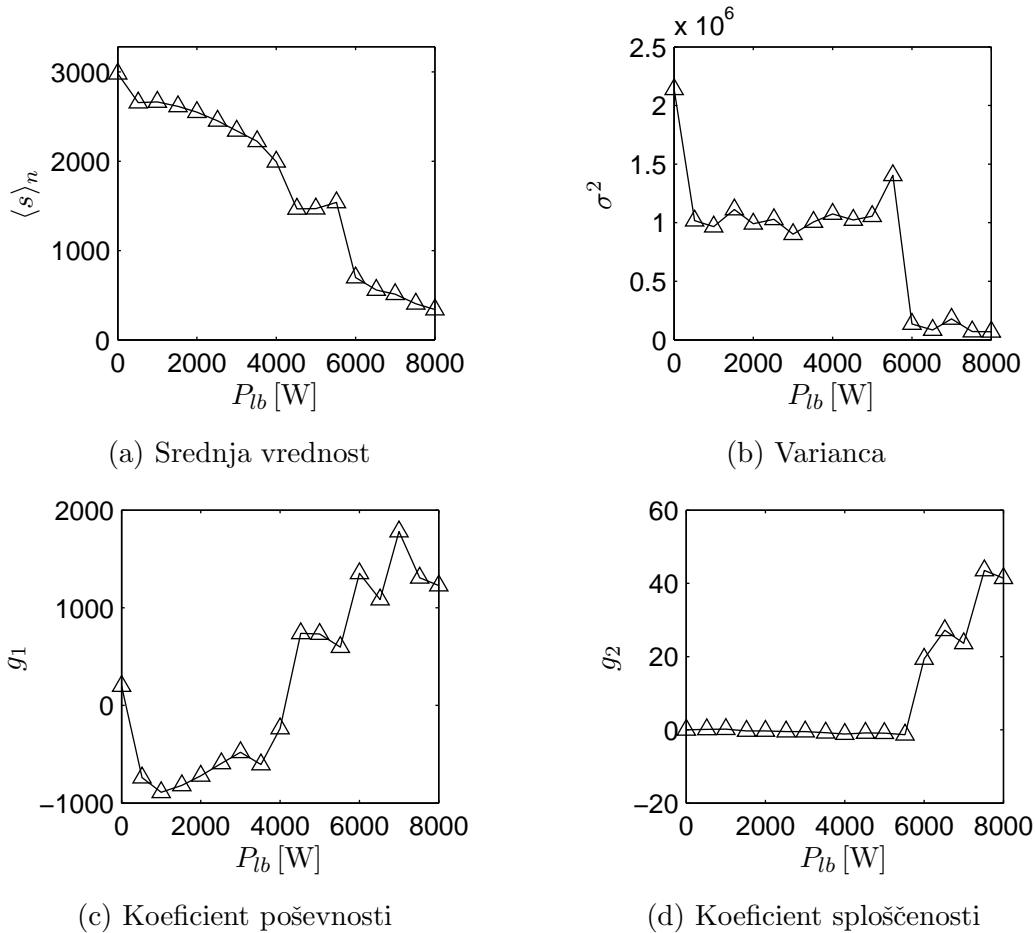
$$g_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^2}, \quad \mu_3 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (s_n - \langle s \rangle_n)^3, \quad (4.3)$$

koeficient sploščenosti pa z

$$g_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \quad \mu_4 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (s_n - \langle s \rangle_n)^4. \quad (4.4)$$

Koeficienta poševnosti in sploščenosti opredelujeta poševnost, oziroma sploščenost glede na normalno porazdelitev, vendar ju v našem primeru ne bomo interpretirali v tem smislu, temveč izključno samo kot številski vrednosti za karakterizacijo.

Poteki statistik časovnih vrst v odvisnosti od moči ločilnega bliska so prikazani na sliki (4.1). Iz poteka srednjih vrednosti, slika (4.1(a)), je razvidno, da se potek srednje vrednosti



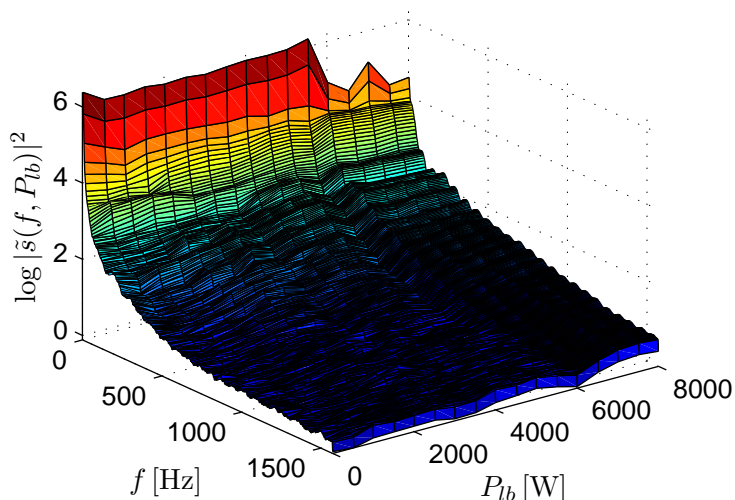
**Slika 4.1:** Srednja vrednost, varianca, koeficient poševnosti in koeficient sploščenosti časovnih vrst v odvisnosti od moči ločilnega bliska

značilno spremeni na prehodu moči ločilnega bliska pri  $P_{lb} = 4520$  W in pri  $P_{lb} = 6000$  W.



Prvi značilni prehod se odraža tudi pri koeficientu poševnosti, slika (4.1(c)), drugi prehod pa dodatno potrđita sliki (4.1(b)) in (4.1(d)). Na slikah (4.1(a)), (4.1(b)) in (4.1(c)) opazimo, da vrednosti srednje vrednosti, variance in koeficienta poševnosti značilno odstopajo tudi pri moči  $P_{lb} = 0$  W. Slednje je pričakovano, saj gre za fizikalno poseben primer procesa LTK. To je namreč edini primer, kjer proces LTK poteka brez ločilnega bliska, torej samo z delom bliska za tvorjenjeh viseče kapljice. Na osnovi potekov časovnih vrst in potekov karakteristik, prikazanih na sliki (4.1), lahko sklepamo, da ima proces tri značilna področja obnašanja v odvisnosti od moči ločilnega bliska. Prvo področje je področje, kjer je moč ločilnega bliska v intervalu  $0 \text{ W} \leq P_{lb} \leq 4000 \text{ W}$ , v drugem področju je moč ločilnega bliska v intervalu  $4520 \text{ W} \leq P_{lb} \leq 5520 \text{ W}$ , v tretjem področju pa je moč ločilnega bliska  $6000 \text{ W} \leq P_{lb} \leq 8000 \text{ W}$ . Recimo, da ta področja označimo z rimskimi številkami I, II in III. Dodatno pozornost bomo namenili tudi časovni vrsti pri moči  $P_{lb} \leq 0$  W.

Za karakterizacijo vpliva moči ločilnega bliska na proces LTK smo uporabili tudi frekvenčni spekter. Frekvenčni spekter v odvisnosti od moči ločilnega bliska prikazuje slika (4.2). Iz frekvenčnega spektra je razvidno, da pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 6000$  W spektralni vrh

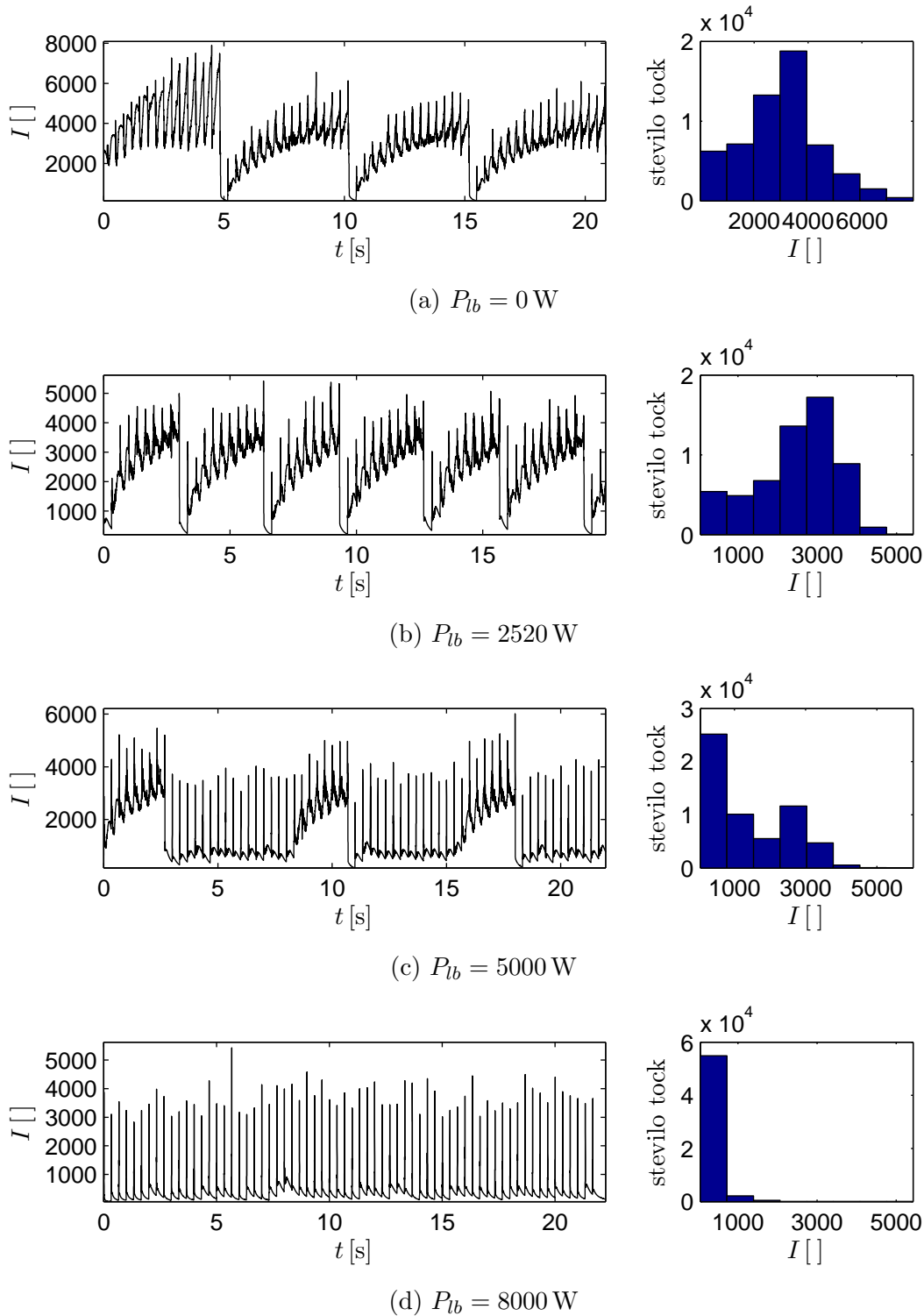


**Slika 4.2:** Potek frekvenčnih spektrov časovnih vrst v odvisnosti od moči ločilnega bliska

pri frekvenci  $f = 0$  Hz značilno pade, kar sovpada s prehodom med področjem II in III. Več o obnašanju in značilnostih procesa iz potekov frekvenčnih spektrov ne moremo sklepati, saj nobene frekvence ali frekvenčno območje značilno ne izstopa.

Na osnovi potekov statistik časovnih vrst in potekov frekvenčnih spektrov v odvisnosti od moči ločilnega bliska smo iz vsakega območja izbrali eno časovno vrsto. Izbrali smo časovne vrste pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 0$  W, 2520 W, 5000 W in 8000 W. Izbrane časovne vrste s

pripadajočimi histogrami amplitud so prikazane na sliki (4.3). Iz pripadajočih IR posnetkov



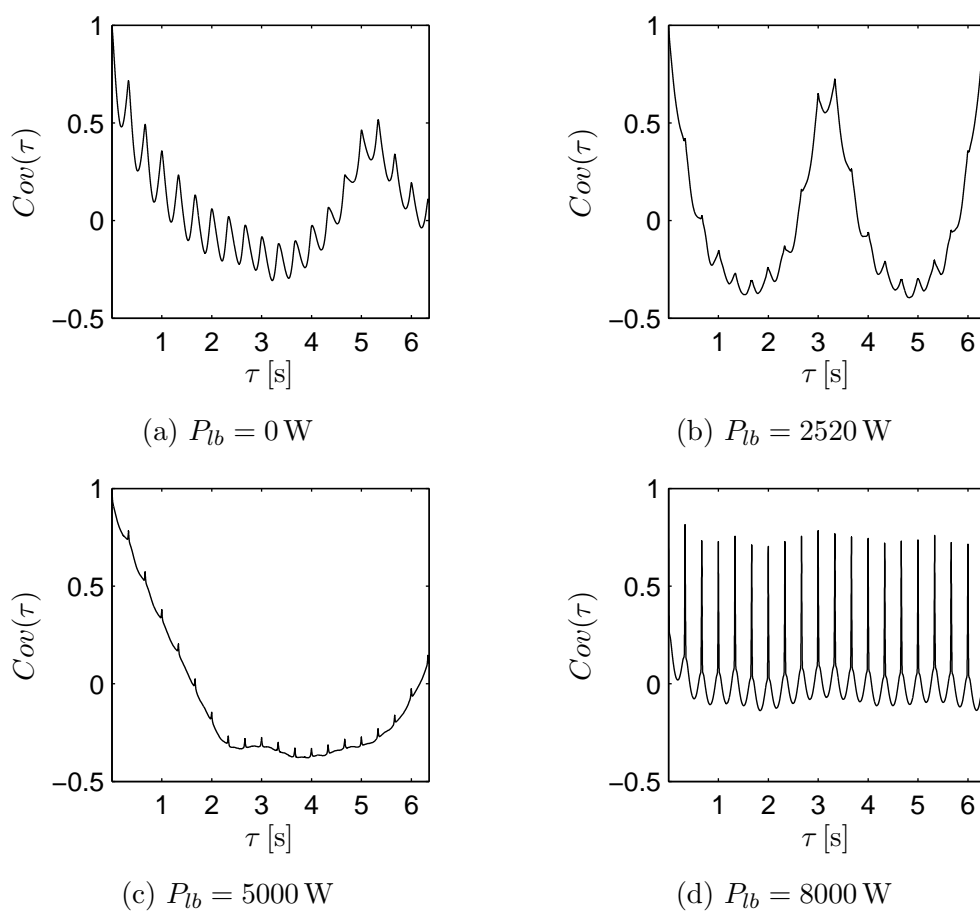
**Slika 4.3:** Izbrane časovne vrste in pripadajoči amplitudni histogrami

lahko vidimo, da časovni vrsti pri močeh ločilnih bliskov  $P_{lb} = 0 \text{ W}$  in  $P_{lb} = 2520 \text{ W}$  ustrežata procesu LTK pri katerem kapljice obvisijo na koncu žice. Kapljica med procesom raste dokler se, domnevno zaradi lastne teže in naslednjega laserskega bliska, ne loči od žice. Opazimo lahko, slika (4.3(a)) in (4.3(b)), da je čas visenja kapljice na žici pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 0 \text{ W}$  daljši kot pri moči  $P_{lb} = 2520 \text{ W}$ . Iz časovne vrste pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 5000 \text{ W}$ , slika (4.3(c)), lahko vidimo, da se kapljice nakaj časa uspešno ločujejo od žice, nato pa obvisijo. Časovna območja uspešnega in neuspešnega ločevanja visečih kapljic nastopajo neregularno, oziroma neperiodično. Časovna vrsta pri moči ločilnega laserskega bliska  $P_{lb} = 8000 \text{ W}$ , slika (4.3(d)), ustreza procesu, kjer se vse viseče kapljice uspešno ločijo od žice.

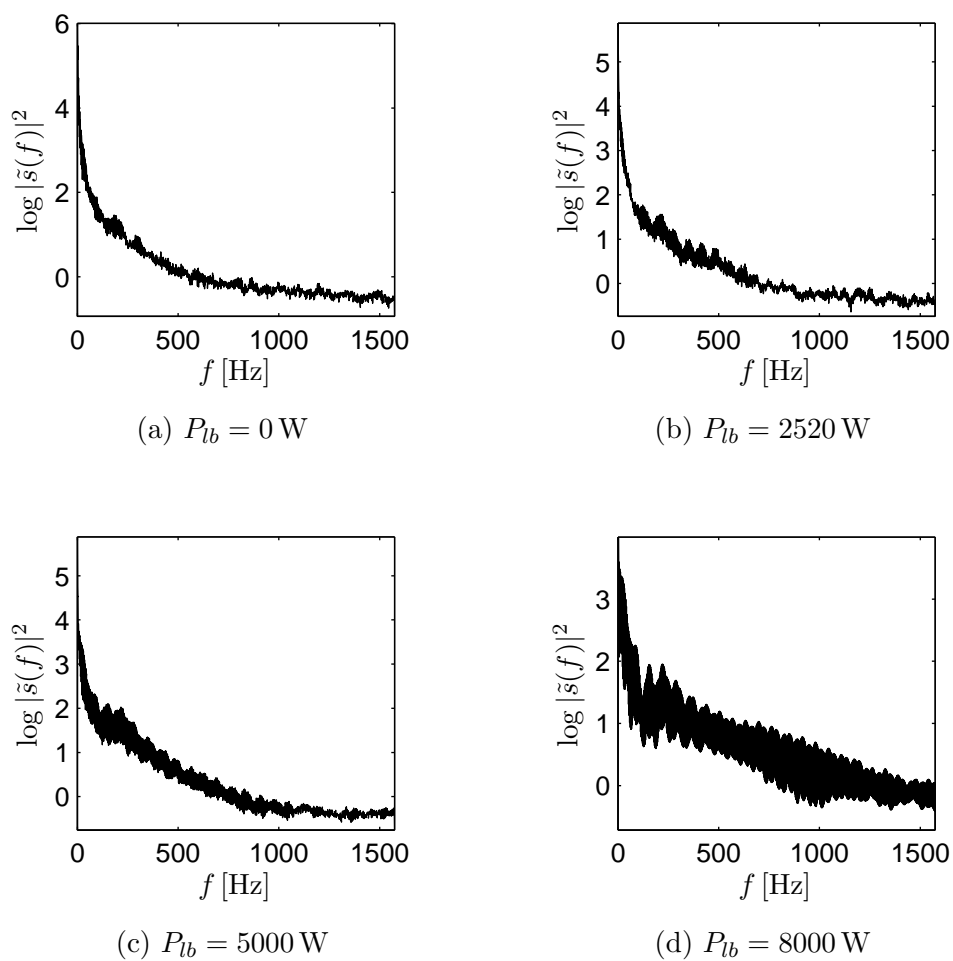
Iz pripadajočih histogramov lahko povzamemo, da je za področje I značilna unimodalna oblika porazdelitve, podobna normalni, ki pa se v področju II spremeni v bimodalno. Oblike histogramov v področju III so asimetrične in se razlikujejo od tistih v področjih I in II. Histogrami amplitud vseh časovnih vrst za posamezne moči ločilnih laserskih bliskov so prikazani v dodatku B.

Na sliki (4.4) so prikazane avtokovariančne funkcije izbranih časovnih vrst. Avtokovariančna funkcija okarakterizira korelacijo, oziroma podobnost signala s samim seboj v odvisnosti od medsebojnega časovnega zamika signala. Za vse časovne vrste je značilno padanje avtokovariančne funkcije in periodični vrhovi s periodo tvorjenja kapljic. Za časovni vrsti iz področja I, torej pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 0 \text{ W}$  in  $P_{lb} = 2520 \text{ W}$ , pa je značilna dodatna perioda, ki sovпада s časi odleta kapljice. Za časovno vrsto pri moči  $P_{lb} = 0 \text{ W}$  je ta čas približno 5 s, za časovno vrsto pri moči  $P_{lb} = 2520 \text{ W}$  pa približno 3 s.

Frekvenčni spektri časovnih vrst posnetih pri izbranih močeh ločilnega laserskega bliska so podrobneje prikazani na sliki (4.5). Za vse prikazane frekvenčne spektre je značilno široko področje frekvenc. Amplitude frekvenčnih spektrov z naraščanjem frekvenc padajo. Razlog za tako obliko potekov frekvenčnih spektrov je nestacionarnost in neharmoničnost časovnih vrst. Opazimo tudi, da moč spektralnega vrha frekvence  $f = 0 \text{ Hz}$  za časovno vrsto pri moči  $P_{lb} = 8000 \text{ W}$  pade. Iz podrobnejšega pregleda frekvenčnega spektra je razvidno, da je najbolj izrazita amplituda pri frekvenci  $f = 3 \text{ Hz}$ , kar je pričakovano, saj smo s to frekvenco tvorili kapljice. Opazni so tudi višji harmoniki frekvence tvorjenja kapljic.



Slika 4.4: Avtokovariančne funkcije



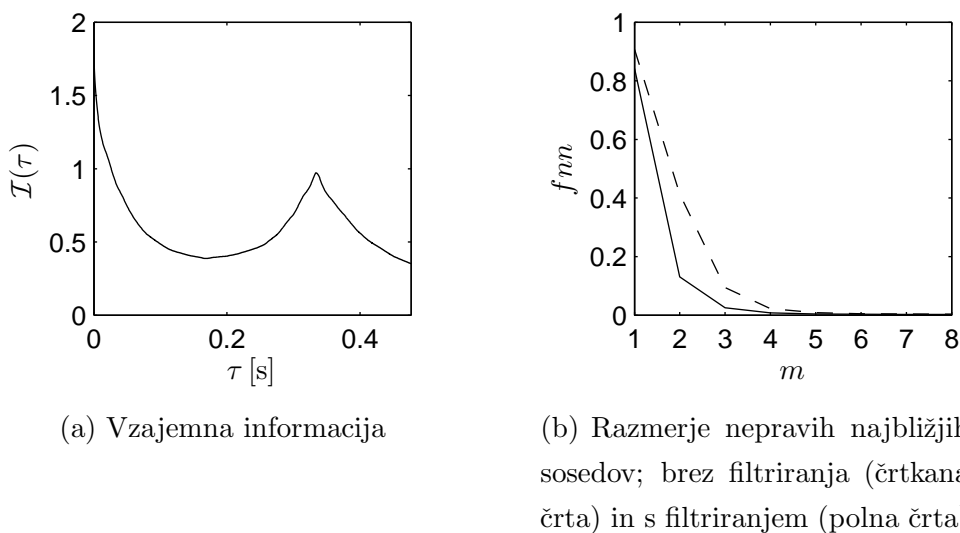
Slika 4.5: Frekvenčni spektri

## 4.2 Nelinearna analiza časovnih vrst

Pri linearnih procesih je neperiodično, oziroma neregularno obnašanje vir neperiodičnega vzbujanja, pri nelinearnih procesih pa je neperiodičen časovni potek procesa lahko posledica izključno samo nelinearnih korelacij, prisotnih v procesu [12]. Zato je takrat, ko imamo pred seboj podatke z neregularnim časovnim potekom smiselno, da poleg linearnih metod analize, ki opisujejo linearne odvisnosti, uporabimo tudi nelinearne metode s katerimi okarakteriziramo lastnosti procesa, ki so posledica nelinearnih korelacij. V nadaljevanju so predstavljeni rezultati nelinearne analize časovnih vrst procesa laserskega tvorjenja kapljic v odvisnosti od moči ločilnega laserskega bliska.

### 4.2.1 Analiza časovne vrste pri moči ločilnega bliska $P_{lb} = 0$ W

Osnova nelinearnih metod analize, ki jih bomo uporabili v nadaljevanju, je rekonstrukcija atraktorja na osnovi izmerjene časovne vrste. V ta namen moramo določiti ustrezen časovni zamik  $\tau$  in minimalno potrebno dimenzijo vlaganja  $m_e$ . Za določitev ustreznega časovnega zamika uporabimo zamik  $\tau$ , pri katerem ima vzajemna informacija prvi lokalni minimum. Minimalno potrebno dimenzijo vlaganja določimo z metodo nepravih najbližjih sosedov. Slika (4.6) prikazuje vzajemno informacijo časovne vrste in razmerje nepravih najbližjih sosedov. Pri tem smo za potrebe izračuna vzajemne informacije amplitudni razpon časovne vrste

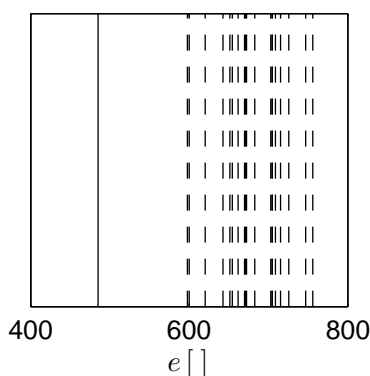


**Slika 4.6:** Prikaz vzajemne informacije in razmerja nepravih najbližjih sosedov

razdelili na 10 intervalov. Ustrezen časovni zamik, ki ga razberemo iz slike (4.6(a)), je  $\tau = 0.1684$ s. Delež nepravih sosedov smo izračunali za dimenzije vstavljanja  $m = 1, \dots, 8$ , pri čemer smo za rekonstrukcijo atraktorja v posameznih dimenzijah uporabili prej izbran časovni

zamik. Na sliki (4.6(b)) vidimo primerjavo razmerij nepravih najbližjih sosedov za filtrirano in nefiltrirano časovno vrsto. Uporabljeno nelinearno filtriranje je podrobneje predstavljeno v dodatku C. Po pričakovanju vidimo, da filtriranje zmanjša razmerje nepravih najbližjih sosedov pri vseh dimenzijah vlaganja. Ocenjena minimalna potrebna dimenzija vlaganja pri filtrirani časovni vrsti je  $m_e = 5$ , pri nefiltrirani pa  $m_e = 6$ .

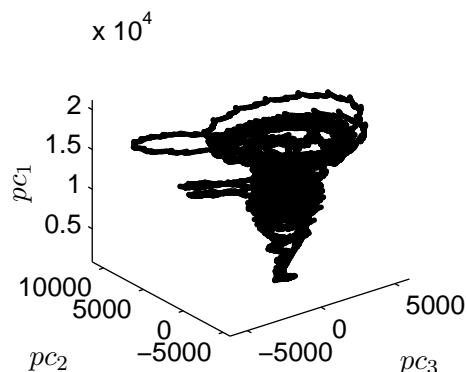
Ko imamo znane parametre rekonstrukcije atraktorja, lahko z metodo nadomestnih časovnih vrst preverimo, ali je obravnavana časovna vrsta res odraz nelinearnega procesa. Na sliki (4.7) vidimo, da je napaka nelinearnega napovedovanja za nefiltrirano originalno časovno vrsto značilno manjša od napak napovedovanja nadomestnih časovnih vrst. Pri testu smo



**Slika 4.7:** Napaka nelinearnega napovedovanja za originalno (polna črta) in devetnajst nadomestnih časovnih vrst (črtkane črte)

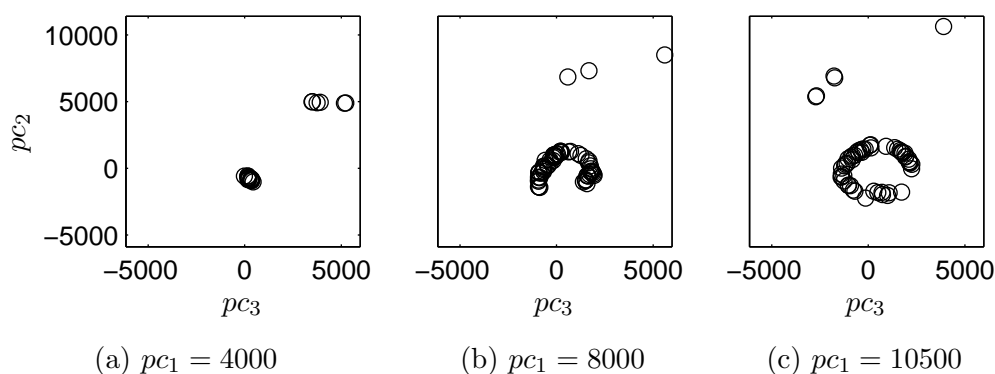
napako nelinearnega napovedovanja, poleg za originalno časovno vrsto, izračunali še za devetnajst nadomestnih časovnih vrst. To pomeni, da lahko z verjetnostjo 0.95 trdimo, da je značilna razlika v napakah napovedovanja med originalno in nadomestnimi časovnimi vrstami posledica nelinearnih korelacij v originalni časovni vrsti, ki so odraz nelinearnega procesa.

Za kvalitativno karakterizacijo procesa se pogosto uporablja vizualni izgled, oziroma slika rekonstruiranega atraktorja. Kvalitativno smo ocenili, da klasično rekonstruiran atraktor s časovnim zamikom  $\tau = 0.1684$  s v dveh ali treh dimenzijah ne predstavlja obetavne strukture, s katero bi lahko okarakterizirali obnašanje procesa, oziroma časovne vrste. Zato smo za namen kvalitativne karakterizacije procesa, atraktor rekonstruirali v koordinatnem sistemu glavnih osi, ki je vizualno bolj reprezentativen. Rekonstruiran atraktor v koordinatnem sistemu prvih treh glavnih osi prikazuje slika (4.8). Za kriterij izbire časovnega zamika in vložitvene dimenzije za rekonstrukcijo atraktorja smo si zadali vsaj 85% variabilnosti na prvih treh glavnih oseh. Z izbiro parametrov rekonstrukcije  $\tau = 0.021$  s in  $m = 15$  zajamemo na prvih treh glavnih oseh 92% variabilnosti. Atraktor je stožčaste oblike. Naraščajoč radij atraktorja v vertikalni smeri ponazarja rastočo kapljico. S časovno vrsto smo zajeli tri odlete kapljice, kar se na atraktorju vidi kot tri črte, ki potekajo vzdolž stožca.



**Slika 4.8:** Atraktor v koordinatnem sistemu prvih treh glavnih osi

Za dodatno kvalitativno karakterizacijo strukture atraktorja uporabimo Poincaré-jevo sekcijo na izbranih mestih. Na sliki (4.9) so prikazani trije primeri Poincaré-jevih sekcij pravokotnih na prvo glavno os v odvisnosti od lege sečne ravnine. Poincaré-jeva sekcija je

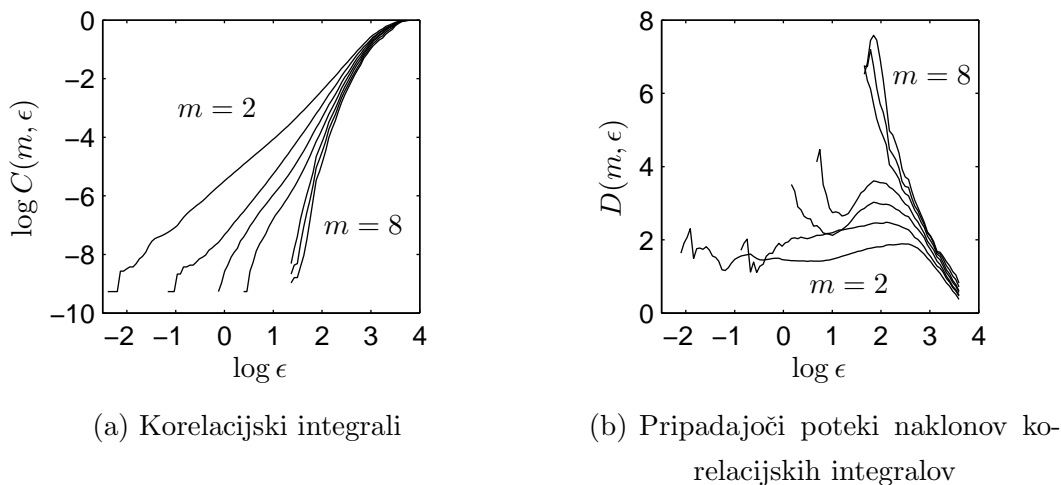


**Slika 4.9:** Izbrane Poincaré-jeve sekcije pravokotno na prvo glavno os  $pc_1$  za različne izbrane sečne ravnine

po definiciji odvisna od izbranega položaja navidezne sečne ploskve, kar je razvidno tudi iz slike (4.9). Glede na spreminjanje oblik Poincaré-jevih sekcij pri različnih izbranih mestih sečne ravnine, lahko potrdimo stožčasto obliko atraktorja. Iz Poincaré-jeve sekcije prikazane na sliki (4.9(a)) bi lahko sklepali na periodo dva, vendar ostali Poincaré-jevi sekciji kažeta na kvaziperiodično gibanje.

Poleg ocene minimalne potrebne dimenzije vlaganja  $m_e$ , kot kvantitavno karakteristiko atraktorja uporabimo korelacijsko dimenzijo, ki jo ocenimo iz diagramov korelacijskih integralov. Časovni zamik, ki smo ga uporabili pri rekonstrukciji atraktorja je  $\tau = 0.1684$ s. Korelacijski integrali in njihovi pripadajoči lokalni nakloni so v odvisnosti od dimenzije vlaganja  $m = 2, \dots, 8$  prikazani na sliki (4.10). Iz slike (4.10(a)) je razvidno, da nakloni korelacijskih



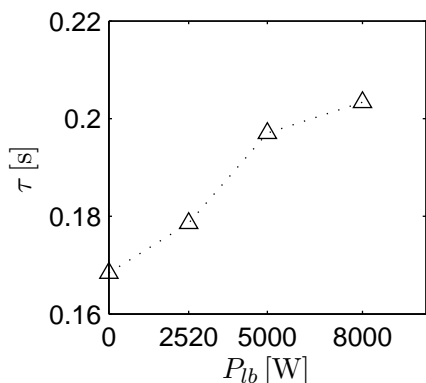


**Slika 4.10:** Prikaz korelacijskih integralov in njihovih naklonov za različne dimenzije vlaganja  $m = 2, \dots, 8$

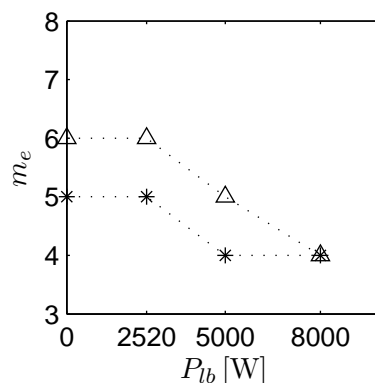
integralov z naraščanjem vložitvene dimenzije konvergirajo, vendar se na sliki (4.10(b)) tega ne opazi, saj slika prikazuje lokalne naklone korelacijskih integralov. Vseeno pa konvergenca naklonov korelacijskih integralov kaže, da je časovna vrsta rezultat determinističnega procesa [10]. Čeprav na sliki (4.10(b)) ni območja za določitev korelacijske dimenzije, lahko iz slike (4.10(a)) približno ocenimo območje skaliranja, ki je v našem primeru  $1.7 < \log \epsilon < 2.7$ . Korelacijskim integralom, katerih nakloni so na tem območju približno konstantni, aproksimiramo polinom prve stopnje. Vodilni koeficient polinoma predstavlja naklon premice, ki se na omenjenem območju najbolj prilega korelacijskim integralom. Vodilni koeficient polinoma, s katerim smo aproksimirali naklone na sliki (4.10(a)) je 5.18. Enako oceno korelacijske dimenzije dobimo tudi z uporabo nefiltrirane časovne vrste. Ocenjena dimenzija atraktorja se ujema tudi z minimalno potrebno dimenzijo  $m_e = 6$ , ki smo jo določili z metodo nepravilnih najbližjih sosedov z nefiltrirano časovno vrsto.

### 4.2.2 Analiza in primerjava izbranih časovnih vrst

Po vzorcu analize časovne vrste v prejšnjem razdelku smo najprej ocenili ustrezen časovni zamik  $\tau$  za rekonstrukcijo atraktorja, ter minimalno potrebno dimenzijo vlaganja  $m_e$ . Ocenjeni časovni zamiki  $\tau$  in minimalne potrebne dimenzije vlaganja so v odvisnosti od moči ločilnega laserskega bliska prikazane na sliki (4.11). Za vse časovne vrste smo ustrezen časovni



(a) Časovni zamiki  $\tau$



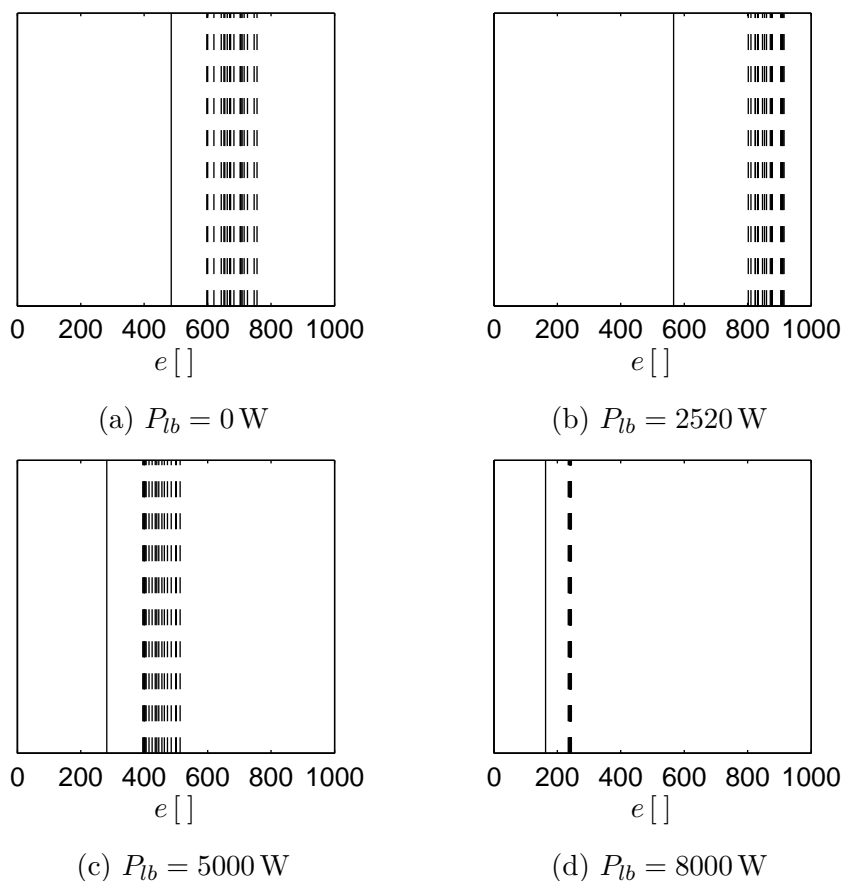
(b) Prikaz minimalne potrebne dimenzije vlaganja za filtrirane (zvezdice) in nefiltrirane (trikotniki) časovne vrste

**Slika 4.11:** Prikaz časovnih zamikov  $\tau$  prvega minimuma vzajemne informacije in minimalne potrebne dimenzije vlaganja določene z metodo nepravih najbližjih sosedov v odvisnosti od moči ločilnega bliska

zamik določili z iskanjem prvega lokalnega minimuma vzajemne informacije, pri izračunu pa smo amplitude časovne vrste razdelili na 10 intervalov. Število intervalov smo določili empirično z opazovanjem funkcije vzajemne informacije. Iz slike (4.11(a)) je razvidno, da časovni zamik narašča z naraščanjem moči ločilnega bliska. To pomeni, da časovna vrsta pri največji moči ločilnega bliska najdlje vsebuje informacijo časovno zamaknjene časovne vrste. Minimalno potrebno dimenzijo vlaganja smo določili z metodo določanja nepravih najbližjih sosedov. Na sliki (4.11(b)) vidimo odvisnost minimalne potrebne dimenzije vlaganja od moči ločilnega bliska za filtrirane in nefiltrirane časovne vrste. Filtriranje časovnih vrst ima za posledico za ena manjšo minimalno potrebno dimenzijo v primerjavi z nefiltriranimi časovnimi vrstami, razen v primeru časovne vrste pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 8000$  W, kjer je minimalna potrebna dimenzija v obeh primerih enaka. Zelo pomembna ugotovitev sledi iz dejstva, da minimalna dimenzija pada z večanjem moči ločilnih bliskov, kar pomeni, da je proces pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 8000$  W, v smislu prostostnih stopenj, dinamsko

enostavnejši, kot proces pri nižji moči ločilnega bliska. V primeru nefiltriranih časovnih vrst je za moči ločilnih bliskov  $P_{lb} = 0 \text{ W}$  in  $P_{lb} = 2520 \text{ W}$  (področje I) minimalna potrebna dimenzija  $m_e = 6$ , v primeru moči  $P_{lb} = 5000 \text{ W}$  (področje II) pade na  $m_e = 5$ , za moč bliska  $P_{lb} = 8000 \text{ W}$  (področje III) pa je  $m_e = 4$ . Pri filtriranih časovnih vrstah je podobno, le da je dimenzija v primeru moči ločilnih bliskov  $P_{lb} = 5000 \text{ W}$  in  $P_{lb} = 8000 \text{ W}$  enaka. Nadalje lahko, glede na minimalne potrebne dimenzije vlaganja, sklepamo, da je proces laserskega tvorjenja kapljic nizkodimenzionalen.

Rezultati analize testa nelinearnosti so prikazani na sliki (4.12), ki prikazuje napake nelinearnega napovedovanja časovnih vrst in njihovih pripadajočih devetnajst nadomestnih časovnih vrst v odvisnosti od moči ločilnega bliska  $P_{lb}$ . Za vse primere časovnih vrst lahko na

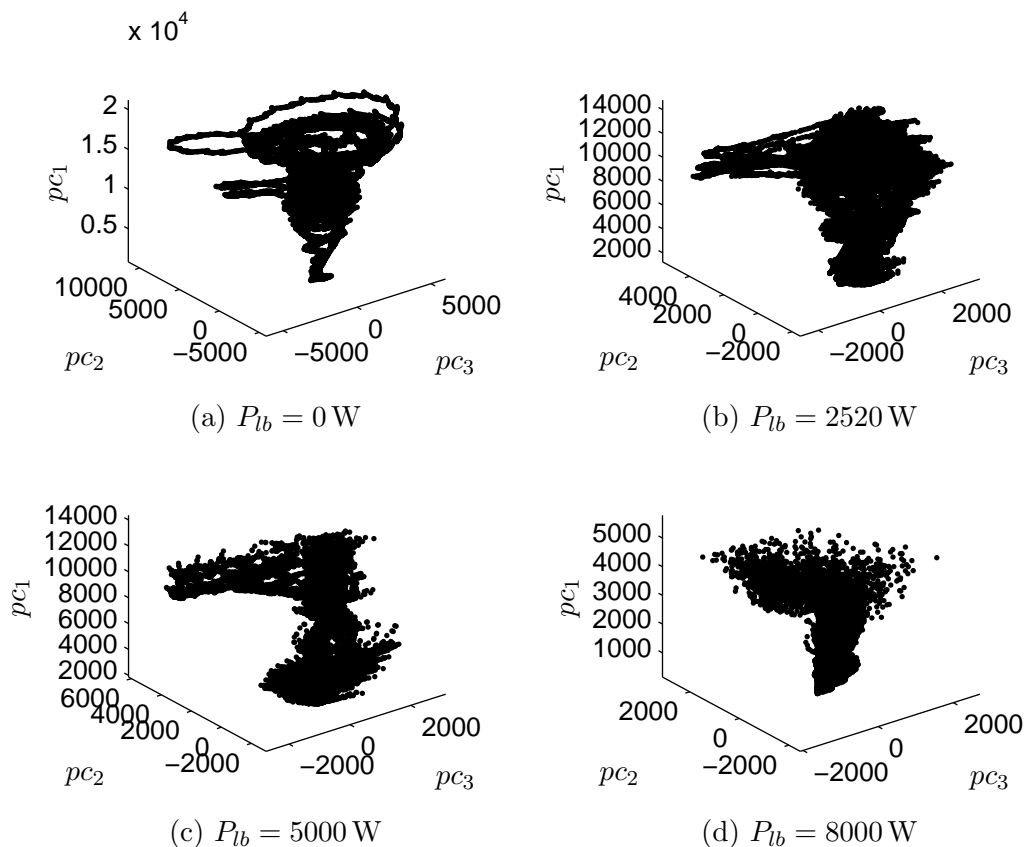


**Slika 4.12:** Prikaz nelinearnih napak napovedi za testiranje nelinearnosti v odvisnosti od moči ločilnega bliska

podlagi tega testa sklepamo, da so odraz nelinearnega procesa, saj so napake napovedovanja za originalne časovne vrste v vseh primerih značilno manjše, kot za nadomestne časovne vrste. Tako kot v primeru moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 0 \text{ W}$  smo tudi v teh primerih pri testu

uporabil devetnajst nadomestnih časovnih vrst, kar pomeni, da je stopnja značilnosti testa  $\alpha = 0.05$ . Iz slike je razvidno, da so napake napovedi za časovno vrsto pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 8000$  W in njene nadomestne časovne vrste, slika (4.12(d)), precej manjše od napak ostalih primerov časovnih vrst, kar seveda pomeni, da je časovna vrsta pri moči  $P_{lb} = 8000$  W bolj napovedljiva od ostalih. Slednje je v skladu tudi s časom zamika, ko funkcija vzajemne informacije doseže prvi lokalni minimum, ki je v tem primeru največji. Dolg čas zamika pomeni dolg čas v katerem zamaknjeni signal še ima neko informacijo o nezamaknjem signalu, kar pomeni, da je takšen signal dobro napovedljiv in je zato napaka napovedi majhna.

Primeri atraktorjev rekonstruiranih v koordinatnem sistemu prvih treh glavnih osi so prikazani na sliki (4.13). V vseh primerih smo parametre rekonstrukcije izbrali tako, da je



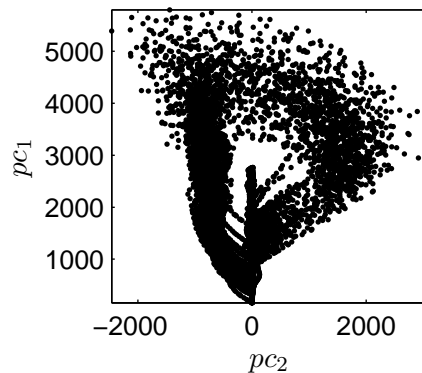
**Slika 4.13:** Prikaz rekonstruiranih atraktorjev v koordinatnem sistemu prvih treh glavnih osi za izbrane moči ločilnega bliska

na prvih treh glavnih oseh zajeto vsaj 85% variabilnosti. Izbiro parametrov in doseženo variabilnost na prvih treh glavnih oseh prikazuje tabela (4.1). Na prvi pogled je jasno, da se oblika rekonstruiranih atraktorjev spreminja v odvisnosti od moči ločilnega laserskega bliska. Iz območij posameznih osi je tudi razvidno, da so atraktorji postavljeni na različna mesta v

**Tabela 4.1:** Parametri rekonstrukcije atraktorja in variabilnost na prvih treh glavnih oseh

$P_{lb}$ [W]	$\tau$ [s]	$m$	variabilnost [%]
0	0.021	15	92
2520	0.021	15	92
5000	0.040	18	89
8000	$9.533 \cdot 10^{-4}$	10	89

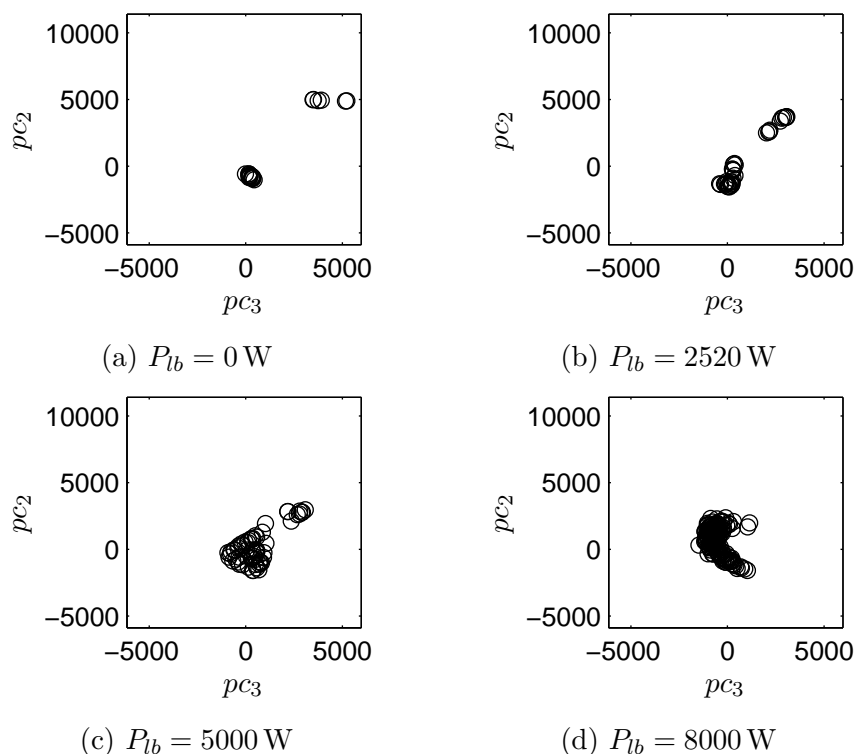
faznem prostoru, kar tudi nakazuje spremembo obnašanja procesa. Atraktorja, ki pripadata področju I, slika (4.13(a)) in (4.13(b)), sta si podobna in imata stožčasto obliko. Atraktor na sliki (4.13(b)) ima v primerjavi z atraktorjem na sliki (4.13(a)) več črt, ki potekajo vzdolž vertikalne osi atraktorja, ker v primeru moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 2520$  W odleti več kapljic kot pri moči  $P_{lb} = 0$  W. Atraktor prikazan na sliki (4.13(c)) je sestavljen iz dveh delov, spodnjega in zgornjega. Spodnji del ustreza procesu, ko se kapljice ločujejo, zgornji del pa ustreza obviselim in naraščajočim kapljicam. Ko kapljica dovolj naraste, odleti, in stanje procesa se ponovno vrne v spodnji del atraktorja. Zadnji atraktor, slika (4.13(d)), je zaprta zanka, kar je bolj razvidno iz slike (4.14) in ustreza uspešno ločenim kapljicam. Ta atraktor



**Slika 4.14:** Projekcija atraktorja prikazanega na sliki (4.13(d))

je podoben spodnjemu delu atraktorja na sliki (4.13(c)), kar potrjuje tudi ujemanje območja faznega prostora v katerem se ta atraktor in spodnji del atraktorja na sliki (4.13(c)) nahajata.

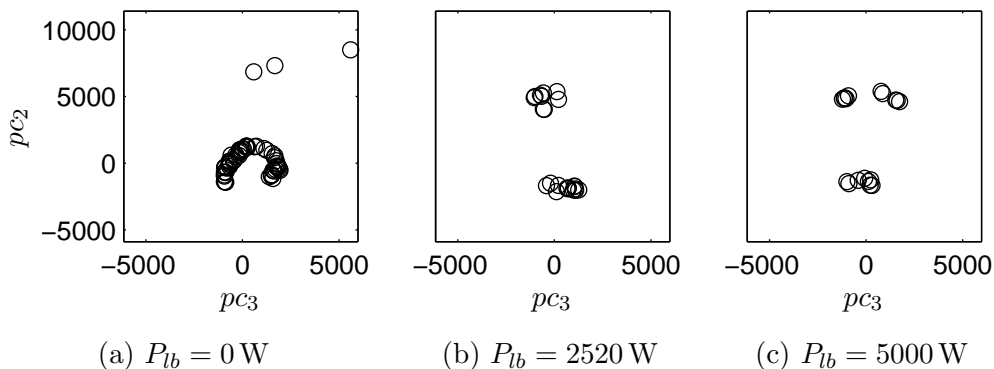
Iz slike (4.13) je razvidno, da težko najdemo navidezno presečno ravnino pravokotno na prvo glavno os, ki bi bila skupna vsem atraktorjem. Pa vendar je na sliki (4.15) prikazana primerjava Poincaré-jevih sekcij, določenih z navidezno sečno ravnino  $pc_1 = 4000$ . Iz slike (4.15) lahko za atraktorja iz področja I, slika (4.15(a)) in (4.15(b)), sklepamo o periodi



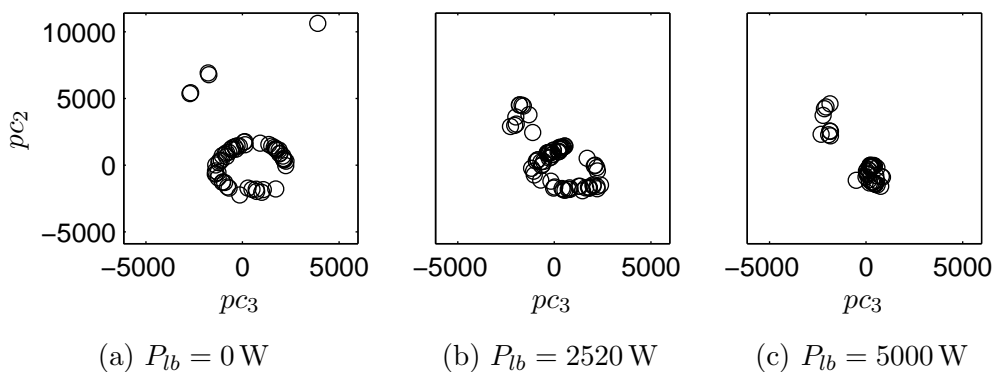
**Slika 4.15:** Prikaz Poincaré-jevih sekcij skozi prvo glavno os pri  $pc_1 = 4000$

dva, preostali sliki pa nakazujeta kvaziperiodičnost. Do določene mere lahko s primerjavo Poincaré-jevih sekcij na slikah (4.15(c)) in (4.15(d)) potrdimo prej navedeno trditev o podobnosti med atraktorjem na sliki (4.13(d)) in spodnjim delom atraktorja na sliki (4.13(c)). Podobnost velja v smislu območja sečišč s presečno ravnino. Če na sliki (4.15(c)) odmislimo točke, ki predstavljajo vrnitev trajektorije iz zgornjega dela v spodnji del atraktorja, bi bila podobnost še večja. V nadaljevanju so prikazane dodatne Poincaré-jeve sekcije, vendar samo za atraktorje pri moči ločilnih bliskov  $P_{lb} = 0 \text{ W}$ ,  $2520 \text{ W}$  in  $P_{lb} = 5000 \text{ W}$ . Poincaré-jeva sekcija atraktorja pri moči  $P_{lb} = 8000 \text{ W}$  je za izbrane sečne ravnine  $pc_1 = 8000$  in  $pc_1 = 10500$  prazna množica. Poincaré-jeve sekcije določene s sečno ravnino  $pc_1 = 8000$  prikazuje slika (4.16), sekcije določene s sečno ravnino  $pc_1 = 10500$  pa so prikazane na sliki (4.17).

Nazadnje primerjajmo še ocenjene korelacijske dimenzije atraktorjev za izbrane časovne vrste. Pregled korelacijskih integralov v odvisnosti od  $m = 2, \dots, 8$  in  $\epsilon$  prikazuje slika (4.18), pripadajoči poteki lokalnih naklonov pa so prikazani na sliki (4.19). Ugotovimo, da nakloni korelacijskih integralov v vseh primerih konvergirajo z naraščanjem dimenzije vlaganja od  $m = 2, \dots, 8$ . V primeru korelacijskih integralov na sliki (4.18(a)) je lepo vidno, da začnejo nakloni konvergirati ko je  $m \geq 6$ , pri ostalih primerih pa dimenzija, pri kateri začnejo nakloni konvergirati ni tako jasno določena. Lokalni nakloni korelacijskih integralov, slika

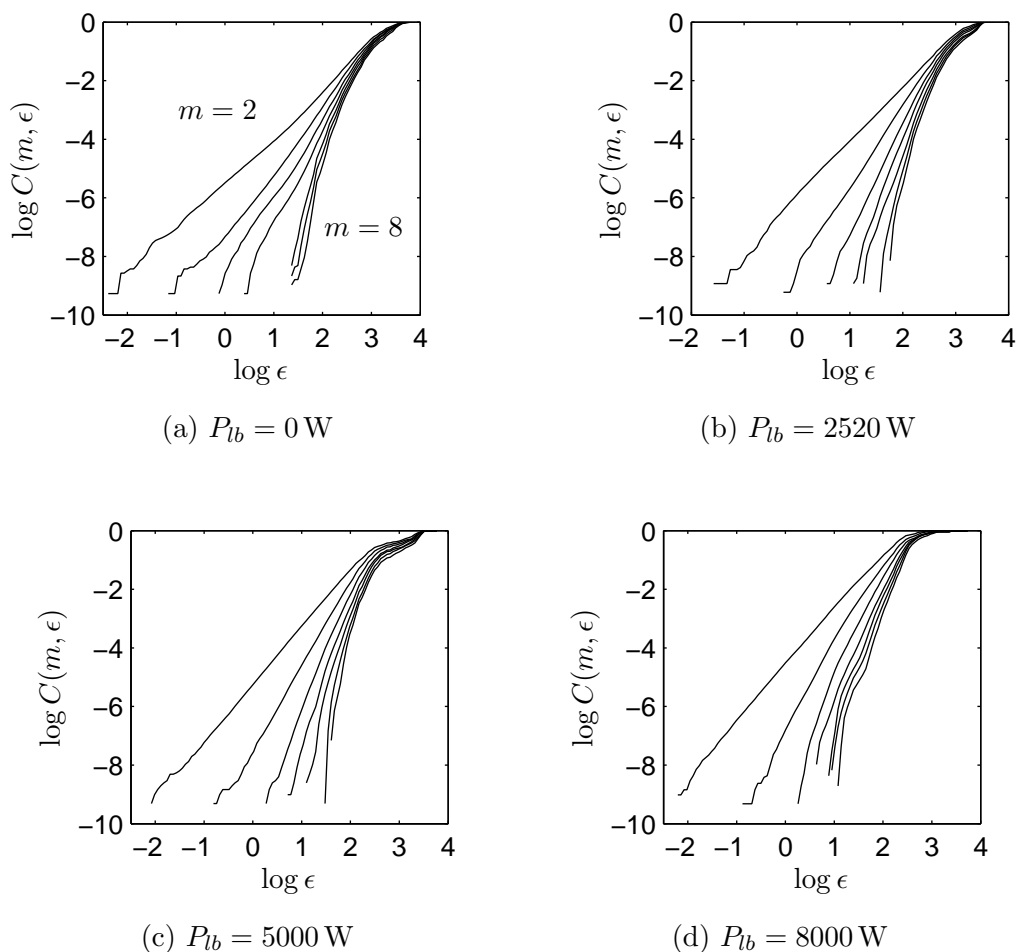


**Slika 4.16:** Prikaz Poincaré-jevih sekcij skozi prvo glavno os pri  $pc_1 = 8000$



**Slika 4.17:** Prikaz Poincaré-jevih sekcij skozi prvo glavno os pri  $pc_1 = 10500$

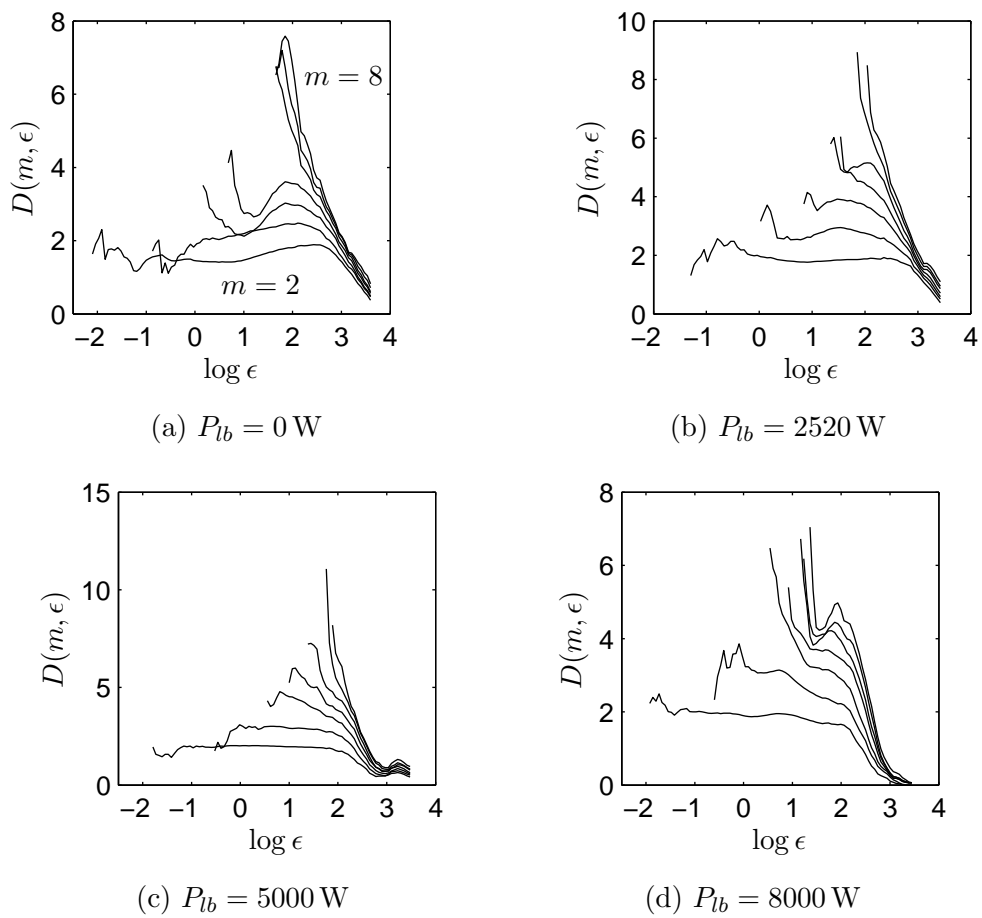
(4.19), so preveč občutljivi, da bi si z njimi lahko pomagali pri določanju ocene korelacijske dimenzije, zato smo korelacijsko dimenzijo ocenili na način, kot smo ga prikazali pri analizi časovne vrste pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 0 \text{ W}$ . Območje skaliranja smo ocenili na podlagi naklonov korelacijskih integralov, slika (4.18), in sicer za korelacijske integrale pri moči  $P_{lb} = 0 \text{ W}$  je območje skaliranja  $1.7 < \log \epsilon < 2.7$ , pri moči  $P_{lb} = 2520 \text{ W}$  je območje skaliranja  $1.76 < \log \epsilon < 2.76$ , pri moči  $P_{lb} = 5000 \text{ W}$  je območje skaliranja  $1.605 < \log \epsilon < 2.605$ , pri moči  $P_{lb} = 8000 \text{ W}$  pa je območje skaliranja  $1.14 < \log \epsilon < 2.14$ . Na omenjenih območjih smo korelacijskim integralom aproksimirali polinome prve stopnje, katerih vodilni koeficienti predstavljajo ocene korelacijskih dimenzij. Rezultati tako ocenjenih korelacijskih dimenzij so prikazani v diagramu na sliki (4.20). Kot smo že omenili pri analizi časovne vrste pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 0 \text{ W}$ , so ocenjene korelacijske dimenzije enake z uporabo filtriranih in nefiltriranih časovnih vrst. Če najprej primerjamo nefiltrirane časovne vrste, se ocenjena korelacijska dimenzija pri moči  $P_{lb} = 0 \text{ W}$  povsem ujema z minimalno potrebno dimenzijo vlaganja, slika (4.11(b)), saj je minimalna dimenzija ravno prva večja celoštevilčna dimenzija glede na dimenzijo atraktorja. Za ostale primere časovnih vrst bi glede na ocenjeno



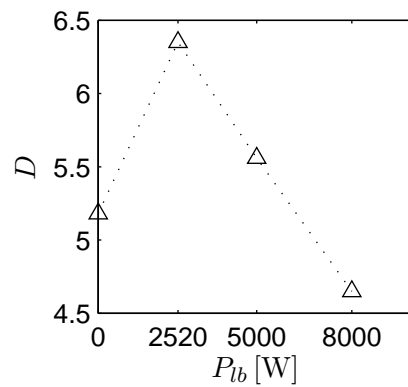
**Slika 4.18:** Prikaz korelacijskih integralov za različne dimenzije vlaganja

korelacijsko dimenzijo atraktorja morali vzeti za ena večjo minimalno potrebno dimenzijo vlaganja. V primeru filtriranih časovnih vrst je ujemanje korelacijske dimenzije z minimalno potrebno dimenzijo slabše. Za primere časovnih vrst pri moči  $P_{lb} = 0 \text{ W}$  in  $P_{lb} = 8000 \text{ W}$  bi, glede na korelacijsko dimenzijo, morala minimalna dimenzija vlaganja biti za ena večja, v primeru časovnih vrst pri moči  $P_{lb} = 2520 \text{ W}$  in  $P_{lb} = 5000 \text{ W}$  pa bi morala biti večja za dva. Ocene korelacijskih dimenzij torej niso povsem konsistentne z minimalnimi potrebnimi vložitenimi dimenzijami, ki smo jih določili z metodo nepravih najbližjih sosedov, vendar so odstopanja minimalna. Potrebna dimenzija bi morala biti večja kvečjemu za ena ali v najslabšem primeru za dva. To tudi dodatno potrjuje domnevo, da je proces laserskega tvorjenja nizkodimenzionalen proces, dimenzije med 4 in 7. Pri tem dimenzionalnost z večanjem moči ločilnega laserskega bliska praviloma pada.





**Slika 4.19:** Prikaz naklonov korelacijskih integralov; od spodaj navzgor  $m = 2, \dots, 8$



**Slika 4.20:** Ocenjene korelacijske dimenzije



## Poglavje 5

# Diskusija

V diskusiji bomo povzeli glavne rezultate analize časovnih vrst pri procesu LTK, dodatno pojasnili nekatere ugotovitve ter poudarili in opozorili na težave, ki so se pojavile tekom dela.

### 5.1 Splošno o nelinearni analizi časovnih vrst

Temelj nelinearne analize časovnih vrst je vložitveni teorem, ki v grobem pravi, da je za popis dinamike neznanega dinamskega sistema dovolj, da poznamo eno spremenljivko, torej skalarno časovno vrsto, ki smo jo izmerili na sistemu. Dejanski pogoji, ki jih mora ta časovna vrsta zadostiti za ekvivalentnost rekonstruiranega in originalnega atraktorja, so v praksi neizvedljivi. Izmerjena časovna vrsta ni nikoli neskončna in brezšumna. Tudi sklep, da vložitveni teorem približno velja, če so pogoji približno izpolnjeni, ni nujno pravilen [5]. Vseeno pa je nelinearna analiza procesov dobrodošla, saj nam v primeru pravilne in kritične presoje razkrije lastnosti dinamskih procesov, ki jih linearna analiza ne. Iz časovne vrste morda ne moremo idealno rekonstruirati atraktorja, lahko pa upamo, da bo rekonstrukcija dovolj dobra [4], pri tem pa moramo vedeti kako to preveriti. Za nelinearno analizo si želimo, da so časovne vrste stacionarne in čim daljše, saj pri analizi računamo različne statistike, od določanja nepravih najbližjih sosedov, do korelacijskih integralov in nelinearnega napovedovanja, ki so verodostojne samo, če imamo na razpolago stacionarne časovne vrste z dovolj velikim številom točk.

### 5.2 Izvedba poiskusov

Na podlagi predhodnih izsledkov o vplivu poteka moči laserskega bliska [1] in vpliva vnosa energije na uspešnost odletov zaporedno tvorjenih kapljic [2], smo se odločili, da izvedemo poiskuse zaporednega tvorjenja kapljic pri različnih močeh ločilnega bliska. Če je vnos toplotne energije v žico neustrezen, kapljica občasno obvisi. Jasno pa je, da ob dovolj

veliki moči ločilnega bliska lahko povzročimo odlet vseh kapljic, saj zaradi dovoljšnje energije vedno pride do nastanka uparjalne kapilare, ki kapljico loči od žice. Zato nas je zanimal vpliv parametra moči ločilnega bliska na uspešnost odletov kapljic in dinamiko procesa.

Po vložitvenem teoremu je vseeno katero spremenljivko dinamskega sistema merimo, v praksi pa je izbira spremenljivke bistvenega pomena [10]. Glede na predhodne raziskave sklepamo, da je temperatura konca žice tista spremenljivka, ki je najbolj karakteristična za proces LTK. Ker temperature ne moremo meriti direktno, jo merimo posredno z IR kamero, ki zaznava toplotno sevanje. Relativno temperaturo smo določili s povprečjem IR slike po vseh točkah tipalnega polja. Problem takega načina merjenja je, da nikoli ne izmerimo samega sevanja konca žice. Prisotno je tudi sevanje okolice konca žice, ki zajema odletelo kapljico in izbrizge taline. Pri nastavitvi kamere smo sicer težili k temu, da bi opazovali samo konec žice, vendar se žica med procesom premika. Zato smo morali opazovati nekoliko širšo okolico, kar vnaša v časovne vrste nezaželjeni šum. Težavo bi lahko rešili z določanjem konca žice na vsakem posnetku, vendar bi to zahtevalo bolj zahtevno in zamudno obdelavo IR posnetkov.

## 5.3 Analiza procesa na osnovi časovnih vrst

### 5.3.1 Uvodna analiza časovnih vrst

Iz pregleda izmerjenih časovnih vrst je razvidno, da se obnašanje procesa z večanjem moči spreminja. Za kvantitativno karakterizacijo opaženih sprememb in smotrno izbiro časovnih vrst za nadaljnjo analizo smo časovne vrste okarakterizirali na osnovi linearnih karakteristik. V ta namen smo podali poteke srednje vrednosti, variance, ter koeficienta poševnosti in sploščenosti v odvisnosti od moči ločilnega bliska. Iz potekov smo zaznali tri področja moči ločilnega laserskega bliska, področje nizkih moči I, srednjih moči II in visokih moči III, ki jim pripadajo kvalitativno različni načini obnašanja procesa. Pregled časovnih vrst smo podali tudi v frekvenčnem prostoru, ki pa, razen potrditve prehoda med področjem II in III, ni omogočil podrobnejših sklepanj o lastnostih procesa.

V področju I ločilni blisk nima dovolj moči, da bi nastala uparjalna kapilara, zato kapljica med procesom raste in se domnevno loči zaradi sile teže in sil, ki so posledica laserskega bliska. Čas med zaporednimi ločitvami kapljic ni povsem periodičen in se krajša z večanjem moči ločilnega laserskega bliska. Za laserske bliske visoke moči (področje III) je za proces značilno, da vse kapljice odletijo. Čas odleta kapljice je določen s časovnim zamikom med ločilnimi laserskimi bliski. Za proces v področju II je značilna kombinacija procesov laserskega tvorjenja kapljic pri laserskih bliskih nizke in visoke moči. Pri tem je zaporedje in trajanje časovnih intervalov obviselih in uspešno ločenih kapljic neregularno.

Za nadaljnjo analizo smo, poleg časovne vrste brez ločilnega bliska, iz vsakega območja moči ločilnega bliska izbrali po eno značilno časovno vrsto, in sicer pri močeh ločilnih bliskov

$P_{lb} = 0 \text{ W}, 2520 \text{ W}, 5000 \text{ W}, 8000 \text{ W}.$

### 5.3.2 Nelinearna analiza časovnih vrst

Z nelinearno analizo izbranih časovnih vrst želimo dodatno kvalitativno in kvantitavno okarakterizirati lastnosti procesa LTK in vpliv moči ločilnega bliska na proces.

Uporabo nelinearnih metod smo opravičili s testom nelinearnosti. Kot testno statistiko smo uporabili napako nelinearnega napovedovanja. Zaradi nelinearnih korelacij v originalnih časovnih vrstah, je bila njihova napaka napovedovanja manjša od vseh pripadajočih linearnih nadomestnih časovnih vrst. Stopnjo značilnosti testa smo izbrali  $\alpha = 0.05$ , zato smo za vsako časovno vrsto tvorili devetnajst nadomestnih časovnih vrst. Napake nelinearnega napovedovanja za časovno vrsto pri visokih močeh ločilnega bliska so bile manjše od napak napovedovanja pri ostalih časovnih vrstah, kar pomeni, da je ta časovna vrsta bolj napovedljiva. To je dodatna potrditev, da je proces v III. področju moči ločilnega bliska dinamsko preprostejši od ostalih.

Za rekonstrukcijo atraktorja moramo poznati ustrezen časovni zamik in minimalno potrebno dimenzijo vlaganja. Časovni zamiki naraščajo z močjo ločilnih bliskov. Skladno s tem napake nelinearnega napovedovanja, kot je to razvidno iz testa nelinearnosti, praviloma podajo. Z metodo nepravilnih najbližjih sosedov smo ugotovili, da minimalna potrebna dimenzija za rekonstrukcijo atraktorja pada z večanjem moči ločilnega laserskega bliska. V primeru nefiltriranih časovnih vrst je minimalna dimenzija iz  $m_e = 6$  v področju I padla na  $m_e = 4$  v področju III. Za filtrirane časovne vrste je bila minimalna dimenzija manjša za ena, razen v področju III, kjer je bila enaka kot pri nefiltrirani časovni vrsti. Takšen rezultat je pričakovan saj vemo, da šum dviguje minimalno potrebno dimenzijo vlaganja. Iz opisanega sledita dve bistveni ugotovitvi. Prva ugotovitev je, da ima proces v različnih področjih različno dimenzionalnost. Visoka dimenzija predstavlja kompleksen dinamski sistem z velim številom prostostnih stopenj. Intuitivno si lahko predstavljamo, da je proces pri katerem kapljica raste in ne vemo kdaj točno bo odletela, dinamsko bolj zapleten, kot proces, kjer kapljica ne raste in se uspešno ločuje od žice s frekvenco ločilnega bliska. Glede na določanje minimalne potrebne dimenzije vlaganja z metodo nepravilnih najbližjih sosedov ima proces pri nižjih močeh ločilnega bliska (področje I) šest prostostnih stopenj, pri visokih močeh (področje III) pa samo štiri. Druga ugotovitev pa se glasi, da je proces LTK nizkodimenzionalen, kar pomeni, da bi dinamiko procesa lahko opisali s sistemom samo štirih do šestih diferencialnih enačb prvega reda. To je pomembna ugotovitev za morebitno modeliranje dinamike procesa.

S prikazom atraktorja smo omejeni na tri dimenzije. V našem primeru je minimalna potrebna dimenzija za rekonstrukcijo atraktorja večja od tri. Projekcija rekonstrukcije atraktorja z metodo časovnih zamikov na trodimenzionalni prostor ni dala oblike, na osnovi katere bi lahko sklepali o lastnostih procesa. To je bil razlog, da smo atraktor prikazali v koor-

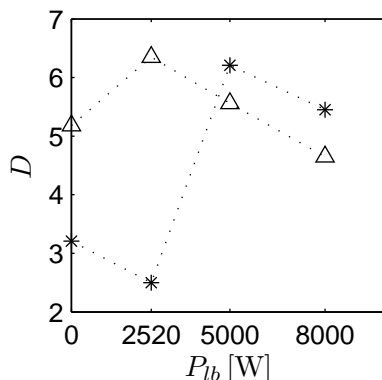
dinatnem sistemu glavnih osi. Seveda moramo za določitev glavnih osi iz skalarne časovne vrste najprej rekonstruirati vektorsko vrsto, za kar potrebujemo časovni zamik in dimenzijo vektorskega prostora. Časovni zamik in dimenzijo smo izbrali tako, da je projekcija na prve tri glavne osi zajela vsaj 85% variabilnosti. To pomeni, da smo večino dinamike procesa zajeli v treh dimenzijah.

Nadalje smo ocenili tudi korelacijsko dimenzijo atraktorja. Omenili smo, da v našem primeru iz korelacijskih integralov lahko zaznamo konvergenco naklonov, vendar iz grafov, ki prikazujejo lokalne naklone korelacijskih integralov območja skaliranja ne opazimo. Razlog za to je, da kljub filtriranju časovne vrste še vedno vsebujejo šum, pa tudi operacija odvajanja je občutljiva na lokalne spremembe korelacijskih integralov. Pomembno vloga pri računanju korelacijskih integralov ima tudi dolžina časovne vrste, ki mora biti čim daljša. V nasprotju z eksperimentalnimi časovnimi vrstami, smo v primeru ocenjevanja korelacijske dimenzije Lorenz-ovega atraktorja območje skaliranja zaznali tudi na grafih lokalnih naklonov korelacijskih integralov.

Območje skaliranja smo zato ocenili z linearno aproksimacijo korelacijskih integralov. Naklon premice predstavlja oceno korelacijske dimenzije atraktorja. Pri tem smo ugotovili, da ocena korelacijske dimenzije ni odvisna od filtriranja časovnih vrst. Filtriranje časovnih vrst ima torej v našem primeru vpliv samo pri metodi nepravih najbližjih sosedov, pri računanju frekvenčnih spektrov (dodatek C) in korelacijskih dimenzij pa ne.

Ocena korelacijske dimenzije  $D$  se je z minimalno potrebno dimenzijo vložitvenega prostora  $m$  ujemala samo v primeru nefiltrirane časovne vrste pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 0W$ , v ostalih primerih pa bi, glede na ocenjeno korelacijsko dimenzijo, minimalna potrebna dimenzija morala biti večja za ena ali največ dva. To še vedno kaže na nizkodimenzionalnost procesa, kar potrjuje ugotovitve do katerih smo prišli z metodo nepravih najbližjih sosedov. Kljub temu opozorimo, da ocene korelacijske dimenzije obravnavamo nekoliko zadržano, saj so ocene lahko precej subjektivne in odvisne od izbire območja skaliranja. Za prepričljivo oceno dimenzije moramo najti skaliranje na območju vsaj ene dekade, recimo na sliki (4.18(c)) pa je izbrano območje skaliranja lahko vprašljivo. V našem primeru ocene korelacijskih dimenzij uporabimo zgolj za potrditev minimalnih potrebnih dimenzij vlaganja in jih ne pripišemo dimenziji dejanskega atraktorja.

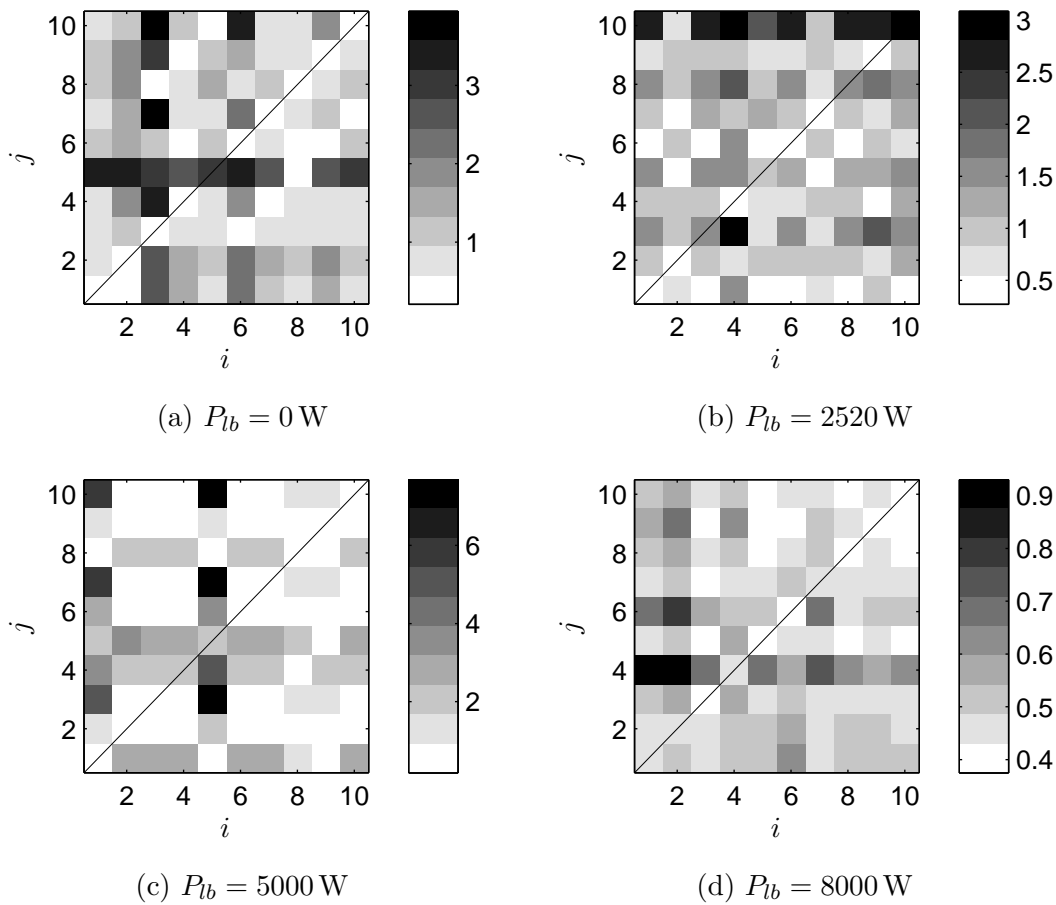
Dodatno podajmo še primerjavo ocen korelacijskih dimenzij izračunanih s časovno zakasnenimi koordinatami in koordinatami glavnih osi. Primerjava je prikazana na sliki (5.1). Metoda PCA je linearna metoda, ki praviloma ne vpliva na invariante atraktorjev. Za primer Lorenz-ovega sistema smo to preverili. Korelacijski integrali in njihovi lokalni nakloni so enaki v primeru rekonstrukcije s časovno zakasnenimi koordinatami in v primeru rekonstrukcije s koordinatami glavnih osi. Za določitev glavnih osi smo uporabili enake parametre rekonstrukcije kot sicer (podrazdelek 2.6). V primeru naših časovnih vrst pa temu ni tako. Kot



**Slika 5.1:** Ocenjene korelacijske dimenzije; uporaba časovno zakasnenih koordinat (trikotniki) in uporaba koordinat glavnih komponent (zvezdice)

kaže slika (5.1) so razlike v ocenah korelacijskih dimenzij očitne. Vseeno pa podobnosti niti ne pričakujemo, saj smo za potrebe določitve glavnih osi pri izbiri parametrov rekonstrukcije uporabili kriterij čim večje variabilnosti na prvih treh glavnih oseh. V takem primeru je ocenjevanje korelacijske dimenzije s koordinatami glavnih osi nesmiselno, saj je večina dinamike zajete v prvih treh glavnih oseh, ostale glavne osi pa vsebujejo večinoma samo šum. Takšna uporaba PCA metode služi samo kot vizualno orodje. V principu koordinate glavnih osi lahko uporabimo za nadaljnjo analizo, vendar mora biti razmerje signala proti šumu koordinat uporabljenih glavnih osi dovolj veliko.

Za verodostojnost rezultatov, ki smo jih dobili na osnovi uporabljenih metod je stacionarnost časovnih vrst eden od osnovnih potrebnih pogojev. Obstajajo različni linearni testi stacionarnosti [7]. V nadaljevanju je prikazan nelinearni test, ki temelji na križni nelinearni napovedi časovnih vrst. Slika (5.2) prikazuje napake križnega napovedovanja za izbrane časovne vrste. Pri tem opozorimo, da skale na sliki niso enake. Za kvantitativno interpretacijo testa stacionarnosti moramo poznati srednjo, maksimalno in minimalno vrednost napak križnega napovedovanja. Ti podatki so predstavljeni v tabeli (5.1). Glede na podatke v tabeli lahko sklepamo, da dolžina časovne vrste pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 5000$  W ne zagotavlja stacionarnosti, saj je maksimalna vrednost skoraj petkrat večja od srednje vrednosti. Rezultat je pričakovan, saj se intervali uspešnega ločevanja kapljic in obvisele kapljice ponavljajo neperiodično, poleg tega pa se intervalom spreminja tudi čas trajanja. Za časovni vrsti pri moči ločilnih bliskov  $P_{lb} = 0$  W in  $P_{lb} = 2520$  W ocenimo, da so bolj stacionarne od tiste pri moči  $P_{lb} = 5000$  W. Vseeno je časovna vrsta pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 2520$  W v smislu danega testa bolj stacionarna od prve časovne vrste pri moči  $P_{lb} = 0$  W. To se zdi smiselno, saj se kapljica pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 2520$  W loči večkrat, kot pri moči  $P_{lb} = 0$  W in ima zato ta časovna vrsta v enakem času več period, oziroma intervalov, ki



**Slika 5.2:** Napake križnega napovedovanja; uporabili smo nefiltrirane časovne vrste in jih razdelili na 10 intervalov

**Tabela 5.1:** Srednja, maksimalna in minimalna vrednost napake križnega napovedovanja v odvisnosti od moči ločilnega bliska

$P_{lb}$ [W]	srednja vrednost []	maksimalna vrednost []	minimalna vrednost []
0	1.301	3.948	0.206
2520	1.120	3.089	0.270
5000	1.629	7.682	0.176
8000	0.508	0.930	0.375

so si med seboj podobni. Časovna vrsta pri  $P_{lb} = 8000 \text{ W}$  v največji meri izpolnjuje pogoj stacionarnosti, saj so razlike med srednjo in maksimalno, oziroma minimalno napako dovolj majhne. Maksimalna napaka ni niti dvakrat večja od srednje vrednosti napak križnega



napovedovanja.

Na osnovi testa stacionarnosti lahko zaključimo, da so rezultati, ki smo jih dobili z analizo časovne vrste pri moči ločilnega bliska  $P_{lb} = 8000 \text{ W}$  najbolj zanesljivi, saj je test pokazal, da je ta časovna vrsta stacionarna. Dokaj zanesljivi so tudi rezultati analize časovne vrste pri moči ločilnega laserskega bliska  $P_{lb} = 2520 \text{ W}$ , nekoliko manj pa pri časovni vrsti pri moči  $P_{lb} = 0 \text{ W}$ . V vseh primerih bi zanesljivost rezultatov analize lahko izboljšali z nekoliko daljšimi časovnimi vrstami. S tem bi se bolj približali zahtevanemu pogoju stacionarnosti časovnih vrst, ki ga zahtevajo uporabljene metode.



## Poglavje 6

# Zaključki

Namen naloge je bil seznaniti se z metodami nelinearne analize časovnih vrst in s pomočjo teh metod okarakterizirati vpliv moči ločilnega bliska na proces laserskega tvorjenja kapljic iz kovinske žice. Za empirični proces procesa smo uporabili skalarne časovne vrste, ki smo jih tvorili iz IR posnetkov procesa. Proces smo okarakterizirali s pomočjo linearne in nelinearne analize časovnih vrst. Za boljše razumevanje nelinearnih metod smo uporabo metod predstavili na primeru Lorenz-ovega dinamskega sistema. Ugotovitve diplomskega dela so strnjeno podane v nadaljevanju.

- Analiza je pokazala, da moč ločilnega laserskega bliska značilno vpliva na proces laserskega tvorjenja kapljic. Ugotovljeni so bili trije različni načini obnašanja procesa.
  - V področju visokih moči ločilnega laserskega bliska v intervalu  $6000 \text{ W} \leq P_{lb} \leq 8000 \text{ W}$  prihaja do ponovljive ločitve kapljice od žice ob vsakem laserskem blisku. Pri tem je mehanizem ločitve kapljice nastanek uparjalne kapilare.
  - V področju nižjih moči ločilnega bliska v intervalu  $0 \text{ W} \leq P_{lb} \leq 4000 \text{ W}$  zaporedje laserskih bliskov povzroči večanje viseče kapljice, dokler se ta ne loči. Čas do ločitve obvisel kapljice se krajša z naraščajočo močjo ločilnega laserskega bliska. Pri tem procesu sklepamo na nek nov mehanizem ločevanja kapljice od žice. Ločitev kapljic domnevno nastopi zaradi sile teže in sil, ki so posledica laserskega bliska.
  - V področju moči ločilnih laserskih bliskov v intervalu  $4520 \text{ W} \leq P_{lb} \leq 5520 \text{ W}$  pa nastopi proces v katerem se neperiodično izmenjujeta oba prej omenjena procesa.
- Analiza dimenzionalnosti procesa z metodo nepravih najbližjih sosedov je pokazala, da je proces nizkodimenzionalen in da z večanjem moči ločilnega bliska dimenzionalnost pade iz 6 na 4. Nizkodimenzionalnost procesa smo potrdili tudi na osnovi ocene korelacijske dimenzije.

- Minimalna potrebna dimenzija vlaganja, ocena korelacijske dimenzije, napaka nelinearne napovedi pri testu nelinearnosti in rekonstrukcija atraktorja kažejo, da je proces pri visokih močeh ločilnih laserskih bliskov dinamsko preprostejši, kot pri procesih z nižjimi močmi ločilnih bliskov. Najkompleksnejši je proces brez, oziroma z ločilnim laserskim bliskom nižje moči.
- Uparaba nelinearnih metod pri analizi časovnih vrst procesa laserskega tvorjenja kapljic je opravičena, saj so časovne vrste nelinearne. Poleg tega smo z nelinearno analizo med drugim prišli do ugotovitve o nizkodimenzionalnosti procesa, česar linearna analiza ne omogoča.

Poleg podanih ugotovitev rezultati analize procesa laserskega tvorjenja kapljic na osnovi časovnih vrst nakazujejo tudi odprta vprašanja, ki se vežejo na kakovost in stacionarnost časovnih vrst. V ta namen bi bilo smiselno izboljšati karakterizacijo polja IR posnetka procesa in tvoriti daljše časovne vrste. Z daljšimi časovnimi vrstami bi se bolj približali pogoju stacionarnosti časovnih vrst, ki ga zahtevajo uporabljene metode in tako izboljšali konsistentnost analize. Podane številske karakteristike bi bilo smiselno tudi statistično ovrednotiti, za kar bi potrebovali več časovnih vrst pri isti moči ločilnega bliska.

Iz vidika procesa pa bi bilo zagotovo zanimivo podrobneje raziskati mehanizem ločitve kapljice od žice, ki smo ga zaznali pri nizkih močeh ločilnega laserskega bliska. Dodatno bi bilo smiselno podrobneje raziskati prehode med posameznimi načini obnašanja procesa v odvisnosti od moči ločilnega laserskega bliska.

# Literatura

- [1] T. Kokalj. Modeliranje in optimizacija laserskega tvorjenja kapljic iz kovinske žice. Doktorska disertacija, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani, 2006.
- [2] J. Bezgovšek. Sistem za krmiljenje procesa laserskega tvorjenja zaporedja kapljic iz kovinske žice. Magistrsko delo, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljana, 2008.
- [3] I.D. Chueshov. *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems*. ACTA, 2002.
- [4] M. Small. *Applied Nonlinear Time Series Analysis. Application in Physics, Physiology and Finances*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2005.
- [5] T. Schreiber. Interdisciplinary application of nonlinear time series methods. *Physics Reports*, 308(11):1–64, 1999.
- [6] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos. With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Addison-Wesley, Massachusetts, 1994.
- [7] H. Kantz and T. Schreiber. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press, second edition, 2004.
- [8] H.D.I. Abarbanel. *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer-Verlag New York, Inc., 1996.
- [9] S. Haykin. *Neural Networks. A Comprehensive Foundation*. Pearson Education (Singapore) Pte. Ltd., second edition, 1999.
- [10] J. Gradišek. Uporaba metod kaotične dinamike za analizo tehniških procesov. Magistrsko delo, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani, 1997.
- [11] H.G. Schuster. *Deterministic Chaos, An Introduction*. Physik-Verlag, Weinheim, 1984.
- [12] R. Hegger and H. Kantz. Practical implementation of nonlinear time series methods: The tisean package. *CHAOS*, 9(2):413–440, 1999.

- [13] T. Schreiber and A. Schmitz. Improved surrogate data for nonlinearity tests. *Physical Review Letters*, 77(4):635–638, 1996.
- [14] J. Schlens. A tutorial on principal component analysis. 2005.
- [15] T. Schreiber. Detecting and analysing nonstationarity in a time series with nonlinear cross-predictions. *Physical Review Letters*, 78(5):843–846, 1997.
- [16] J. Klemenčič. Raziskava laserskega tvorjenja kapljic iz žice majhnega premera. Magistrsko delo, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani, 2003.
- [17] J. Klemenčič. Karakterizacija laserskega tvorjenja kovinskih kapljic. Doktorska disertacija, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani, 2005.

## **IZJAVA**

Podpisani Blaž Krese, roj. 30. 10. 1985 sem diplomsko delo samostojno izdelal pod vodstvom mentorjaizr. prof. dr. Edvarda Govekarja, univ. dipl. inž.

Blaž Krese

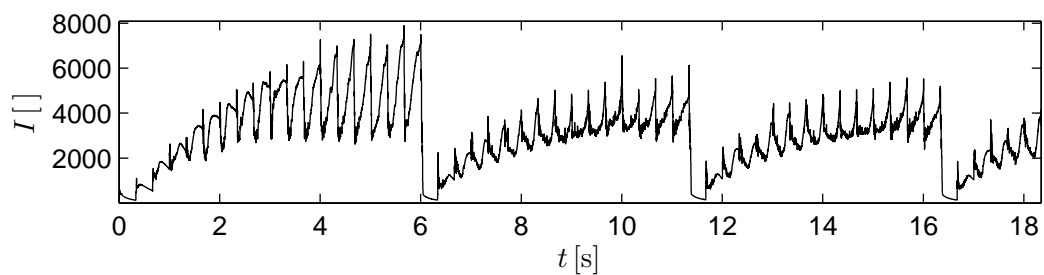
Dne, \_\_\_\_\_



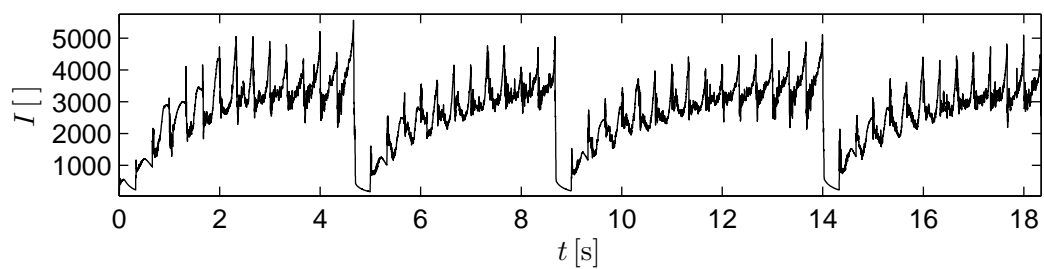


## Dodatek A

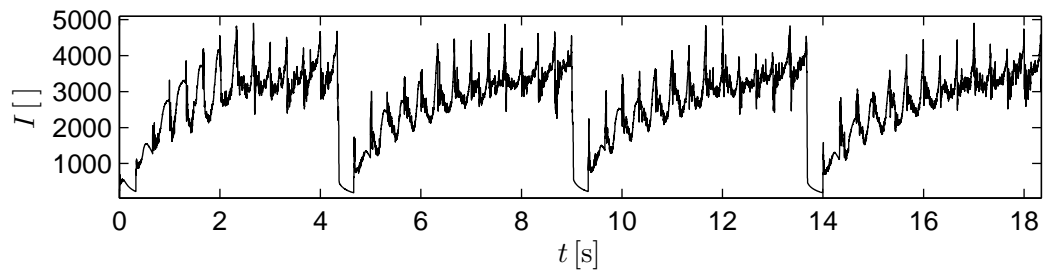
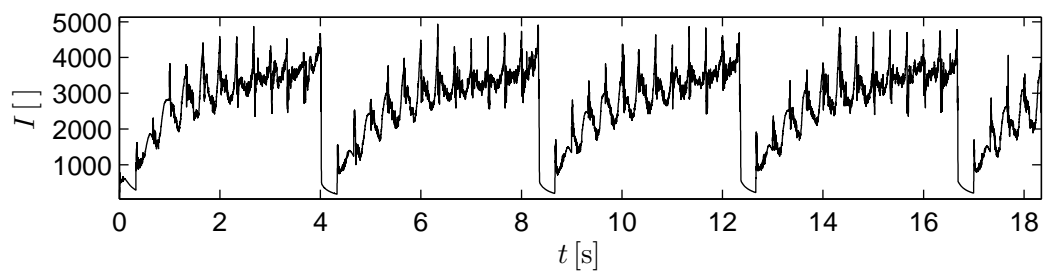
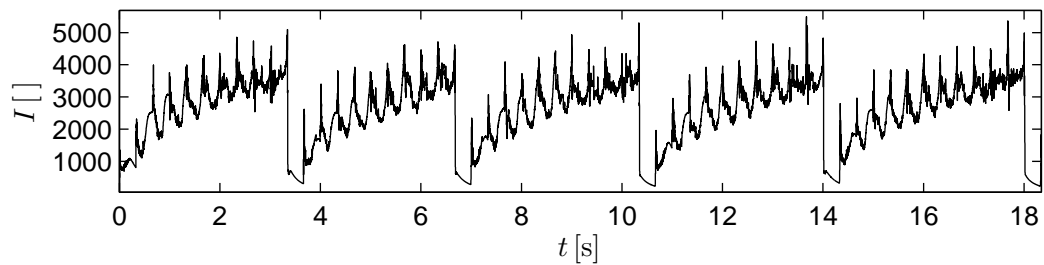
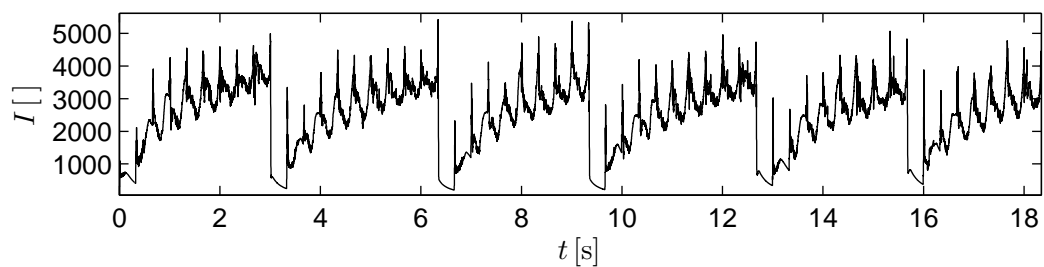
### Pregled časovnih vrst

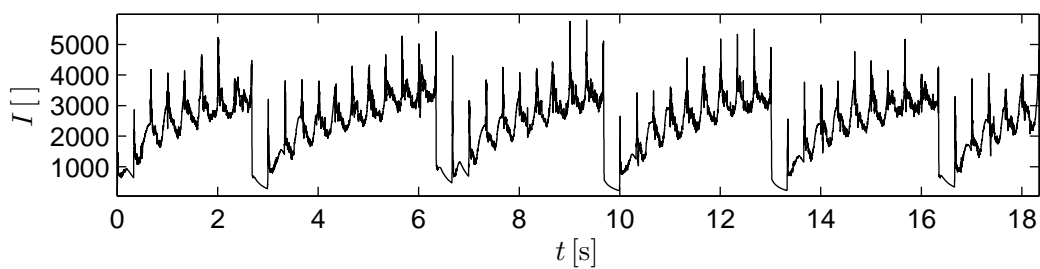


Slika A.1:  $P_{lb} = 0$  W

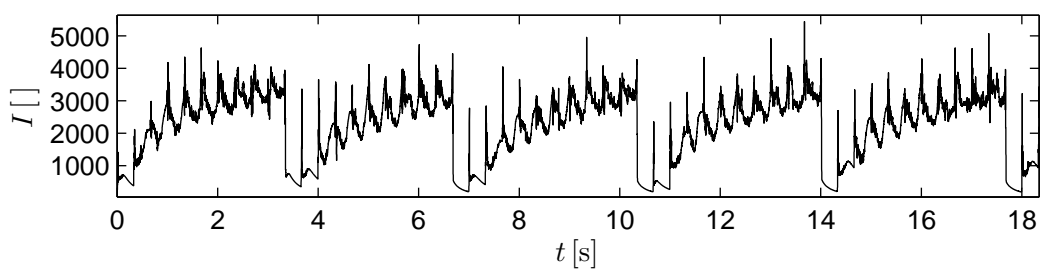


Slika A.2:  $P_{lb} = 520$  W

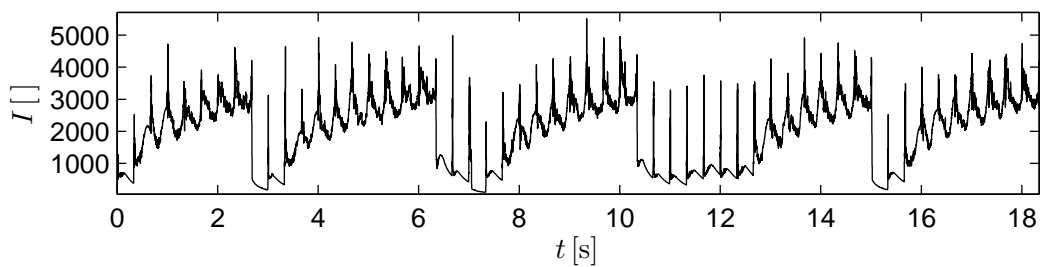
**Slika A.3:**  $P_{tb} = 1000$  W**Slika A.4:**  $P_{tb} = 1520$  W**Slika A.5:**  $P_{tb} = 2000$  W**Slika A.6:**  $P_{tb} = 2520$  W



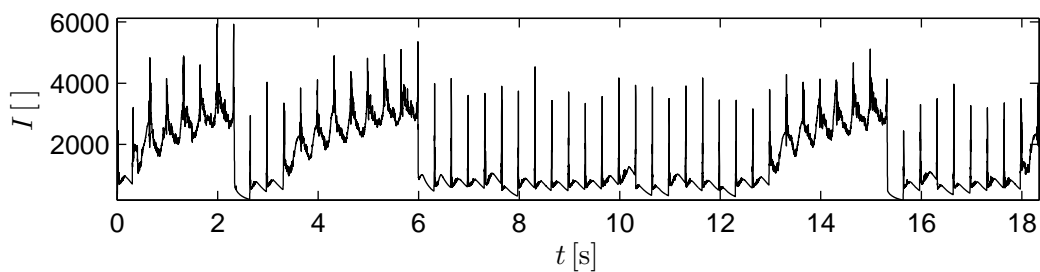
Slika A.7:  $P_{lb} = 3000$  W



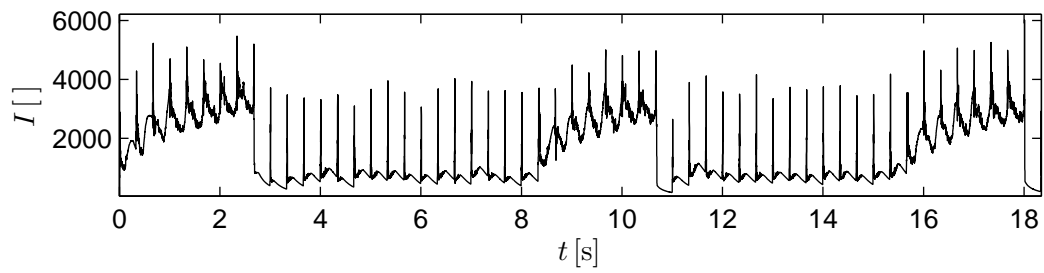
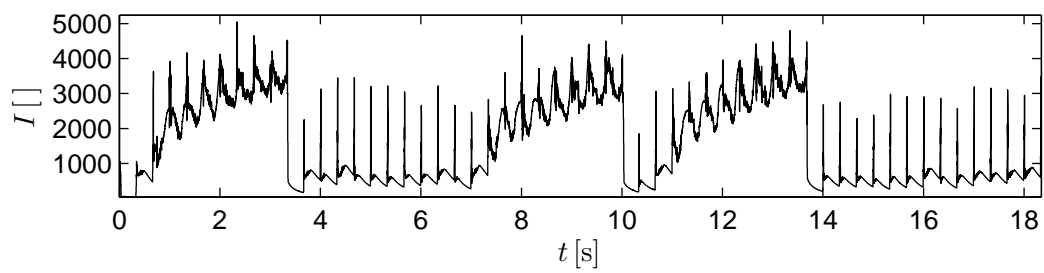
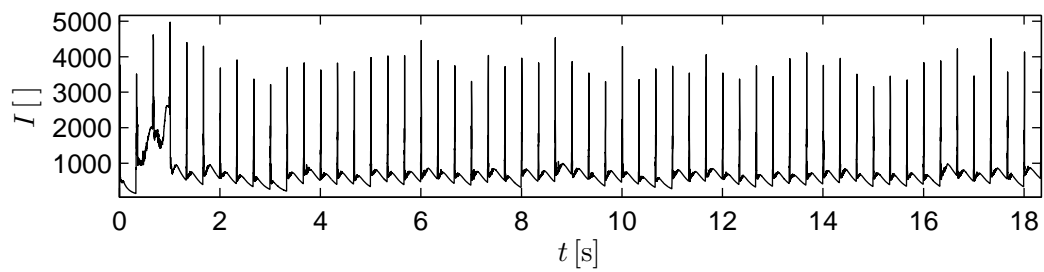
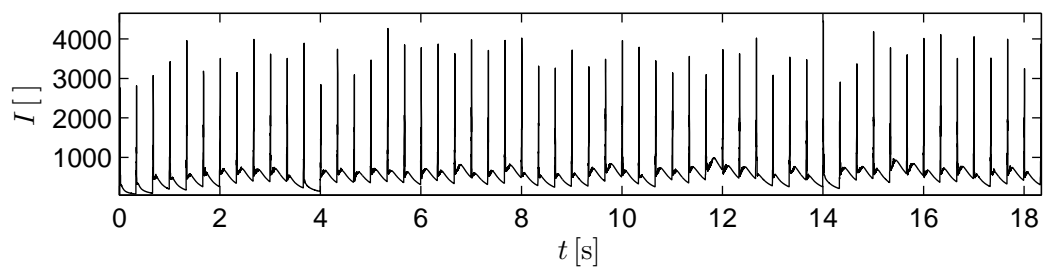
Slika A.8:  $P_{lb} = 3520$  W

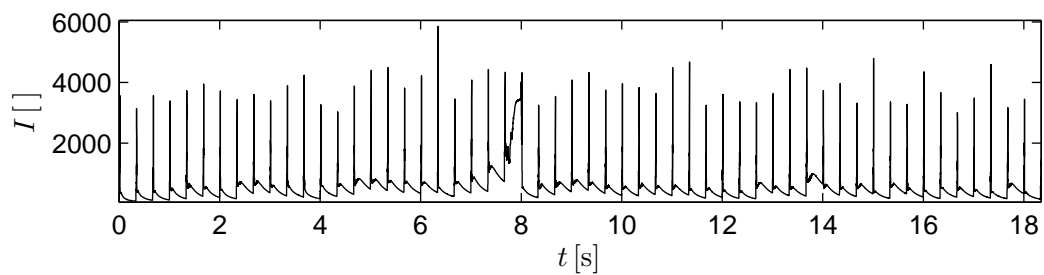


Slika A.9:  $P_{lb} = 4000$  W

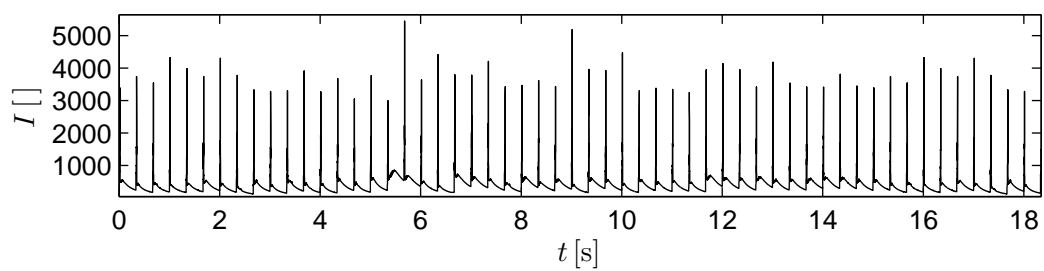


Slika A.10:  $P_{lb} = 4520$  W

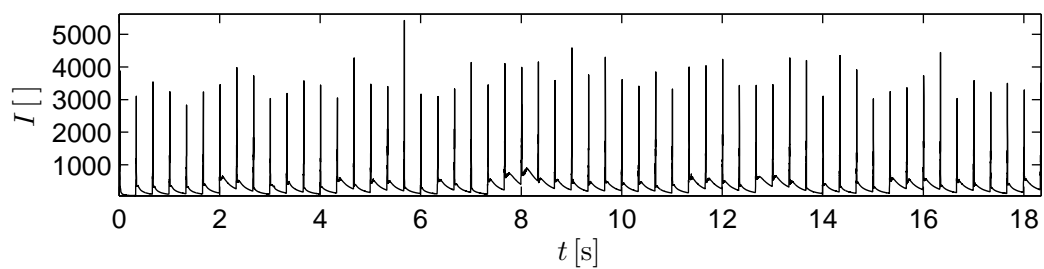
Slika A.11:  $P_{lb} = 5000$  WSlika A.12:  $P_{lb} = 5520$  WSlika A.13:  $P_{lb} = 6000$  WSlika A.14:  $P_{lb} = 6520$  W



Slika A.15:  $P_{lb} = 7000$  W



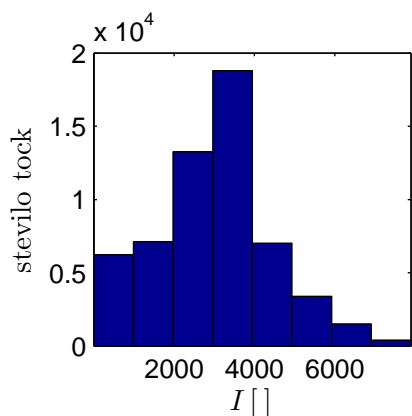
Slika A.16:  $P_{lb} = 7520$  W



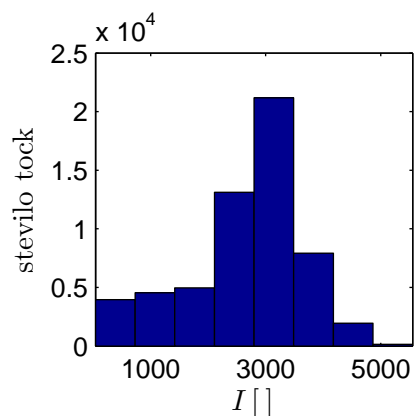
Slika A.17:  $P_{lb} = 8000$  W

## Dodatek B

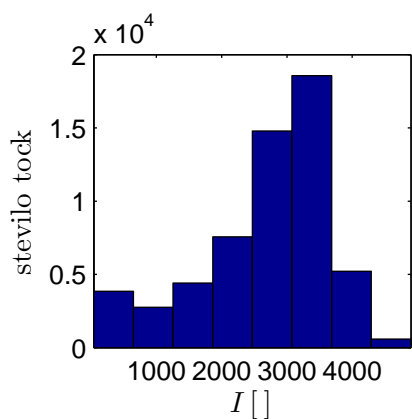
# Histogrami časovnih vrst



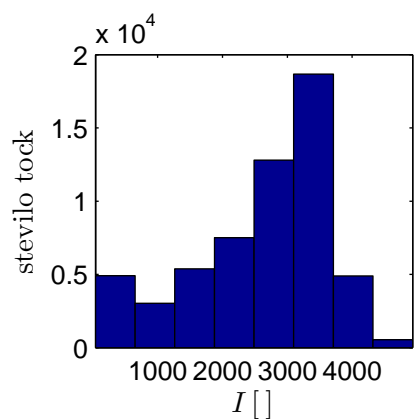
(a)  $P_{lb} = 0 \text{ W}$



(b)  $P_{lb} = 520 \text{ W}$

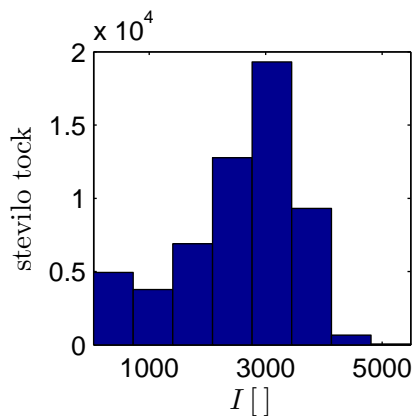
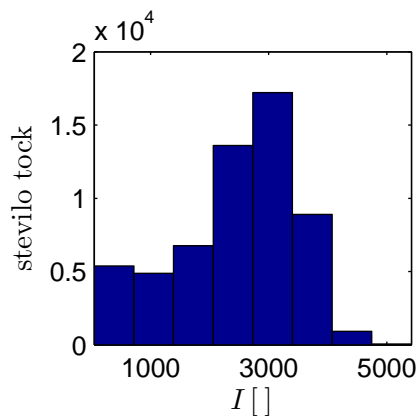
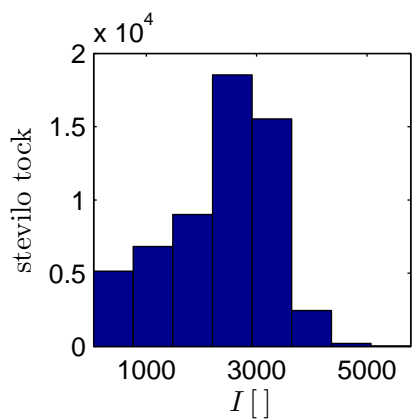
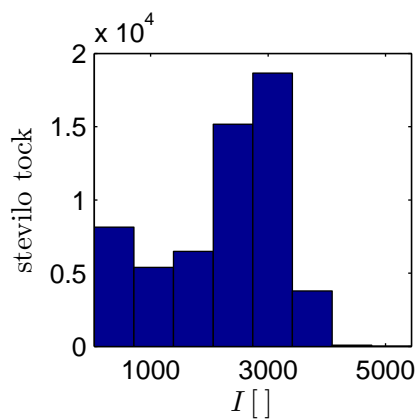
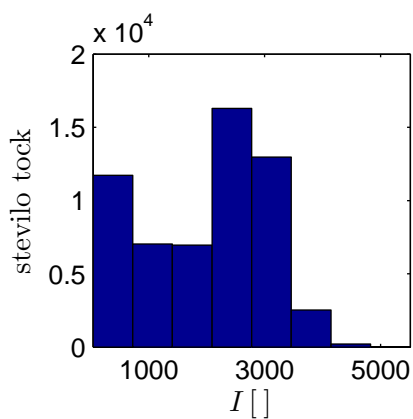
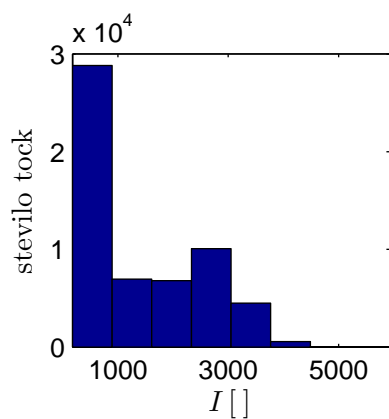


(c)  $P_{lb} = 1000 \text{ W}$

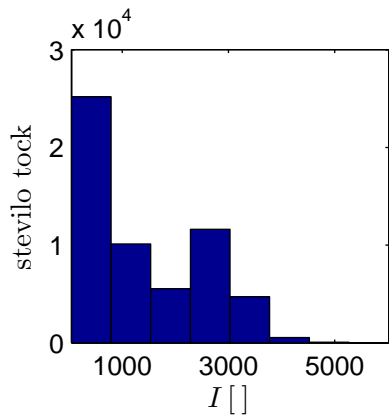
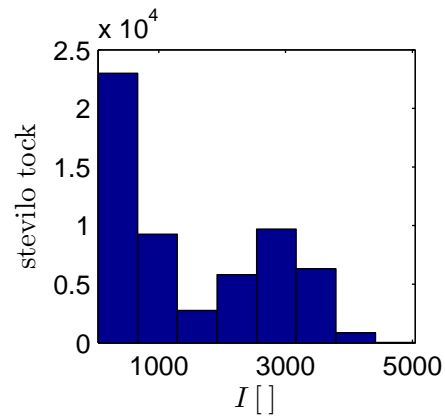
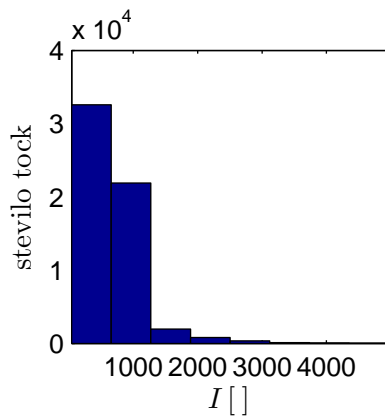
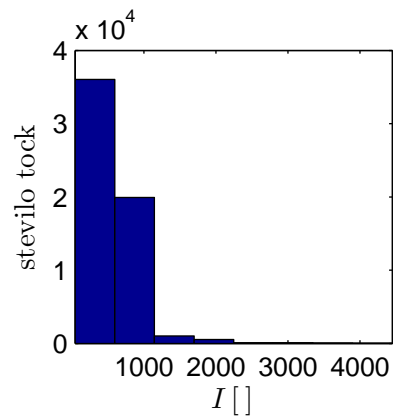
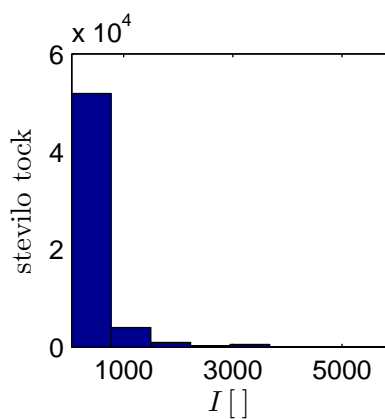
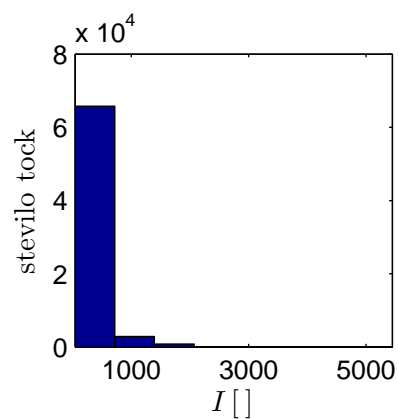


(d)  $P_{lb} = 1520 \text{ W}$

Slika B.1: Histogrami

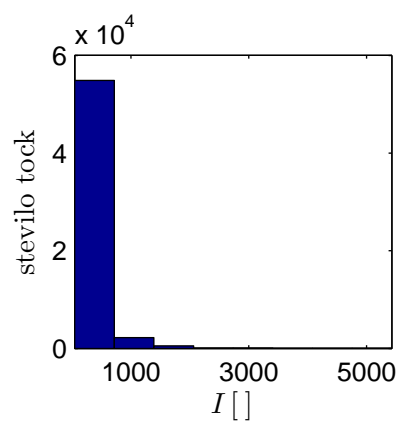
(a)  $P_{lb} = 2000$  W(b)  $P_{lb} = 2520$  W(c)  $P_{lb} = 3000$  W(d)  $P_{lb} = 3520$  W(e)  $P_{lb} = 4000$  W(f)  $P_{lb} = 4520$  W

Slika B.2: Histogrami - nadaljevanje

(a)  $P_{lb} = 5000 \text{ W}$ (b)  $P_{lb} = 5520 \text{ W}$ (c)  $P_{lb} = 6000 \text{ W}$ (d)  $P_{lb} = 6520 \text{ W}$ (e)  $P_{lb} = 7000 \text{ W}$ (f)  $P_{lb} = 7520 \text{ W}$ 

Slika B.3: Histogrami - nadaljevanje





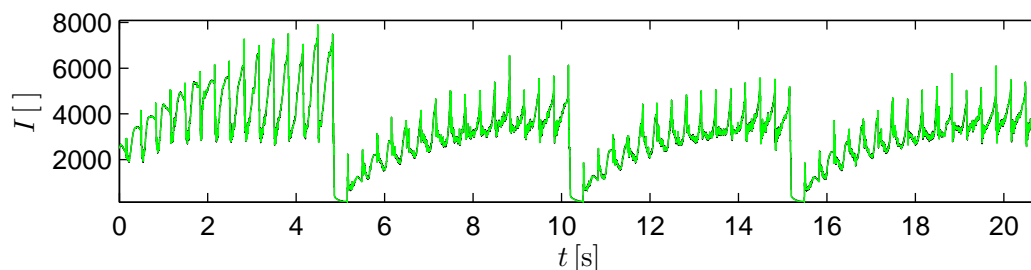
(a)  $P_b = 8000 \text{ W}$

Slika B.4: Histogrami - nadaljevanje

## Dodatek C

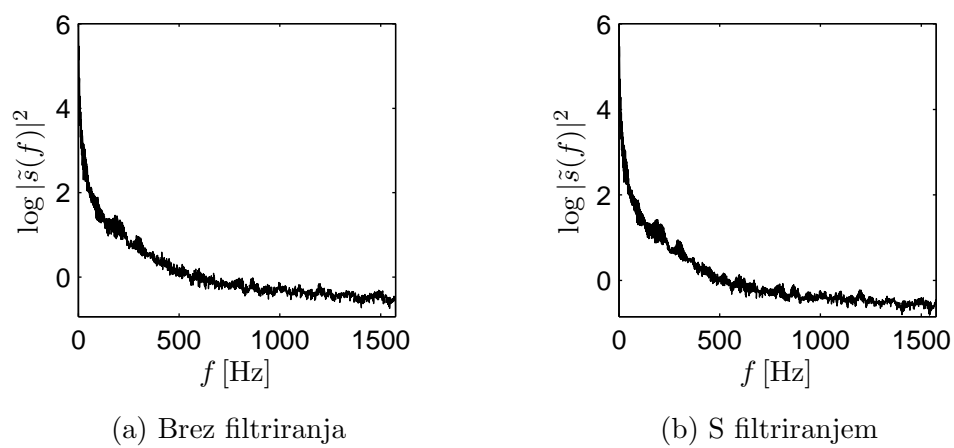
# Primer nelinearnega filtriranja

Na začetku analize smo časovne vrste najprej filtrirali, pri čemer smo uporabili enostavno nelinearno filtriranje, ki podobno, kot pri napovedovanju, enačba (2.38), uporablja lokalno konstantno povprečje bližnjih točk [7]. Predpostavili smo, da je časovna vrsta zašumljena z belim šumom, zato smo kot kriterij izbire radija okolice v kateri so točke za računanje lokalnega povprečja upoštevali, da mora avtokovariančna funkcija odfiltriranega signala hitro pasti iz 1 na 0 in tako ostati. Na sliki (C.1) je prikazan primer filtrirane in nefiltrirane časovne vrste pri moči ločilnega bliska  $P_b = 0\text{ W}$ . Vidimo, da sta filtrirana in nefiltrirana



**Slika C.1:** Prikaz filtrirane (zelena črta) in nefiltrirane (črna črta) časovne vrste pri moči ločilnega bliska  $P_b = 0\text{ W}$

časovna vrsta skoraj povsem enaki. Slednje potrdi tudi primerjava frekvenčnih spektrov, ki so prikazani na sliki (C.2)



**Slika C.2:** Primerjava frekvenčnih spektrov za nefiltrirano in filtrirano časovno vrsto