Dodatek k Poglavju 8

Linearne transformacije

8.3 Harmonično vzbujanje linearnega sistema

...

Primer 8.2 Določimo frekvenčno odzivno funkcijo za nihalo z maso na vzmeti in viskozni dušilki.

Odziv $y(t)$ na vzbujanje s silo $x(t)$ je posredno opisan z diferencialno enačbo:

$$m\ddot{y} + d\dot{y} + ky = x(t)$$

in dvema začetnima pogojema. V primeru, ko je vzbujanje podano z $x(t) = \mathrm{e}^{i\omega t}$, izrazimo odziv z $y = H(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}$ in dobimo:

$$(-m\omega^2 + id\omega + k)H(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t} = \mathrm{e}^{i\omega t}\,,$$

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + id\omega}\,.$$

Če zapišemo $\zeta = d/\left(2\sqrt{km}\right)$ in $\omega_0^2 = k/m$, dobi za frekvenčno odzivno funkcijo naslednjo obliko:

$$H(\omega) = \frac{1/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\zeta\omega_0\omega}\,.$$

Pri grafični predstavitvi kompleksno $H(\omega)$ običajno zapišemo kot $H(\omega) = |H(\omega)|\,\mathrm{e}^{i\varphi(\omega)}$, kjer je $\varphi(\omega) = \arctan\left(\Im\left[H(\omega)\right]/\Re\left[H(\omega)\right]\right)$, ter amplitudo $|H(\omega)|$ in fazo $\varphi(\omega)$ narišemo posebej. Amplitudo običajno narišemo kot $20\log_{10}|H(\omega)|$, čemur ustrezajo enote decibeli (dB), za frekvenčno os pa uporabimo logaritemsko razdelitev. Takšno predstavitev frekvenčne odzivne funkcije $H(\omega)$ imenujemo *Bodejev diagram* (slika 8.3). $\square$

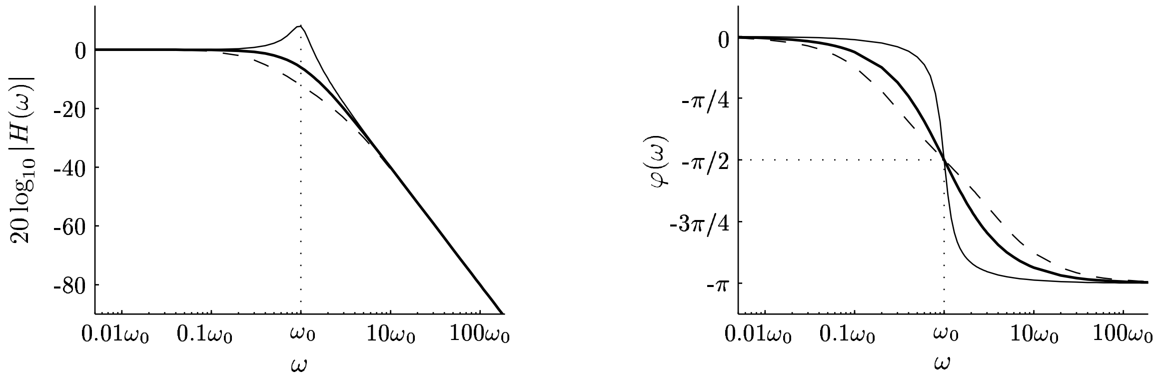
S primerjanjem diferencialne enačbe in izraza za $H(\omega)$ v primeru 8.2 ugotovimo, da lahko frekvenčno odzivno funkcijo kar preberemo iz diferencialne enačbe. Pri tem k-ti odvod pretvorimo v $(i\omega)^n$. Za splošno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\mathrm{d}^k y(t)}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{\mathrm{d}^k x(t)}{\mathrm{d}t^k} \tag{8.1}$$

je frekvenčna odzivna fukcija:

$$H(\omega) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k\,(i\omega)^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k\,(i\omega)^k}\,. \tag{8.2}$$

...



(a) Amplituda $H(\omega)$ **(b)** Faza $H(\omega)$

Slika 8.3: Absolutna vrednost in faza frekvenčne odzivne funkcije nihala z maso na vzmeti in viskozni dušilki za različne vrednosti razmernika dušenja (primer 8.2): $\zeta = 0.2$, $\zeta = 1$ (debelejši črti) in $\zeta = 2$ (črtkani črti). $m = 1$, $\omega_0 = 1$.

8.4 Fourierova analiza odzivnih nihanj

8.4.1 Fourierova vrsta

Poljubno periodično funkcijo s periodo T lahko izrazimo s *Fouerierovo vrsto*:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \, \mathrm{e}^{i\omega_k t} \,. \tag{8.3}$$

V njej je $\omega_k = k\omega_1$ mnogokratnik osnovne krožne frekvence $\omega_1 = 2\pi/T$, $\mathrm{e}^{i\omega_k t}$ je kompleksna harmonična funkcija in α_k *kompleksni Fourierov koeficient.* α_k določimo tako, da enačbo (8.3) na obeh staneh pomnožimo z $\mathrm{e}^{-i\omega_r t}$ in produkt integriramo po intervalu s širino ene periode. V vsoti se nato pojavijo integrali naslednjega tipa:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{i(\omega_k - \omega_r)t} \, \mathrm{d}t = \begin{cases} T \left. \dfrac{\mathrm{e}^{i(k-r)2\pi t/T}}{i(k-r)2\pi} \right|_{-T/2}^{T/2}, & \text{za } k \neq r \,, \\ T \,, & \text{za } k = r \,. \end{cases} \tag{8.4}$$

Ker je eksponentna funkcija $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ periodična s periodo 2π, je za $k \neq r$ rezultat enak 0. Tako je:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{i(\omega_k - \omega_r)t} \, \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 \,, & \text{za } k \neq r \,, \\ T \,, & \text{za } k = r \,. \end{cases} \tag{8.5}$$

Ob upoštevanju tega izraza dobimo za kompleksni Fourierov koeficient izraz:

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \, \mathrm{e}^{-i\omega_k t} \, \mathrm{d}t \,. \tag{8.6}$$

Fourierovo vrsto lahko izrazimo tudi z realnimi koeficienti in harmoničnimi funkcijami:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t \right) \,, \tag{8.7}$$

pri čemer veljajo naslednje zveze med kompleksnimi koeficienti α_k ter realnimi koeficienti a_k in b_k:

$$a_k = \alpha_k + \alpha_k^*\,, \qquad b_k = i\left(\alpha_k - \alpha_k^*\right)\,, \qquad \alpha_k = \frac{a_k - ib_k}{2}\,. \tag{8.8}$$

Znak * označuje operacijo konjugacije. Koeficiente a_k in b_k izračunamo na naslednji način:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{8.9a}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos\omega_k t\,\mathrm{d}t\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,, \tag{8.9b}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin\omega_k t\,\mathrm{d}t\,, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8.9c}$$

in pri tem upoštevamo $\omega_k = 2k\pi/T$. Iz izraza (8.9a) vidimo, da koeficient a_0 ustreza povprečni vrednosti funkcije $x(t)$ na intervalu ene periode T. Iz izrazov (8.9b) in (8.9c) lahko ugotovimo, da so $a_k = 0$, kadar je funkcija $x(t)$ liha, medtem ko so $b_k = 0$, kadar je $x(t)$ soda.

8.4.2 Fourierova transformacija

Pri zapisu funkcije $x(t)$ s Fourierovo vrsto (enačba (8.3)) smo privzeli, da je $x(t)$ periodična s periodo T. Neperiodične funkcije lahko obravnavamo kot periodične z neomejeno periodo. Pri izračunu koeficientov vrste je treba določiti limito $1/T \to 0$. V ta namen namesto koeficienta α_k uporabimo spremenljivko $X(\omega_k) = T\alpha_k$ in Fourierovo vrsto zapišemo v obliki:

$$x(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega_k)\,\mathrm{e}^{i\omega_k t}\,. \tag{8.10}$$

Spomnimo, da je $\omega_k = 2\pi k/T$ in $\omega_{k+1} - \omega_k = 2\pi/T = \Delta\omega_k$. Vidimo, da je $1/T = \Delta\omega_k/2\pi$, zato lahko zapišemo:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega_k)\,\mathrm{e}^{i\omega_k t}\,\Delta\omega_k\,. \tag{8.11}$$

Ko T narašča preko vsake meje, preide vsota v integral in dobimo namesto Fourierove vrste *Fourierov integral*:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega\,. \tag{8.12}$$

V tem integralu je $X(\omega)$ kompleksna amplituda harmonične komponente s krožno frekvenco ω definirana z:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t\,. \tag{8.13}$$

Z integraloma (8.12) in (8.13) definiramo prehod iz frekvenčne v časovno sliko spremenljivke x in obratno. Prehod iz ene slike v drugo imenujemo *Fourierova transformacija*, medtem ko funkciji $x(t)$ in $X(\omega)$ imenujemo *par Fourierovih transformirank* in ju zapišemo:

$$X(\omega) = \mathcal{F}\left\{x(t);\omega\right\} \qquad \text{in} \qquad x(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{X(\omega);t\right\}\,. \tag{8.14}$$

V nadaljevanju navajamo nekaj parov Fourierovih transformirank:

$$x(t) = 1 \qquad X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)\,, \tag{8.15a}$$

$$x(t) = \delta(t) \qquad X(\omega) = 1\,, \tag{8.15b}$$

$$x(t) = \mathrm{e}^{i\omega_0 t} \qquad X(\omega) = 2\pi\delta\left(\omega - \omega_0\right)\,, \tag{8.15c}$$

$$x(t) = \mathrm{e}^{-ct}\,, \quad t \geq 0\,, c > 0 \qquad X(\omega) = \frac{1}{c + i\omega}\,, \tag{8.15d}$$

$$x(t) = \frac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-ct}}{(n-1)!}\,, \quad t \geq 0\,, c > 0 \qquad X(\omega) = \frac{1}{(c + i\omega)^n}\,, \tag{8.15e}$$

$$x(t) = \cos\omega_0 t \qquad X(\omega) = \pi\left(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\right)\,, \tag{8.15f}$$

$$x(t) = \sin\omega_0 t \qquad X(\omega) = \pi i\left(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\right)\,, \tag{8.15g}$$

$$x(t) = \mathrm{e}^{-c|t|}\,, \quad c > 0 \qquad X(\omega) = \frac{2c}{c^2 + \omega^2} = \frac{2}{|c|} \cdot \frac{1}{1 + (\omega/c)^2}\,, \tag{8.15h}$$

$$x(t) = \mathrm{e}^{-c|t|}\cos\omega_0 t\,, \quad c > 0 \qquad X(\omega) = \frac{c}{c^2 + (\omega_0 + \omega)^2} + \frac{c}{c^2 + (\omega_0 - \omega)^2}\,, \tag{8.15i}$$

$$x(t) = \mathrm{e}^{-c^2 t^2}\,, \quad c > 0 \qquad X(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{c}\,\mathrm{e}^{-t^2/(4c^2)}\,. \tag{8.15j}$$

Pri računanju Fourierovih transformacij si lahko pomagamo z naslednjimi zvezami:

$$x(ct) \Longleftrightarrow \frac{1}{|c|} X\left(\frac{\omega}{c}\right)\,, \tag{8.16a}$$

$$\frac{1}{|c|} x\left(\frac{t}{c}\right) \Longleftrightarrow X(c\omega)\,, \tag{8.16b}$$

$$x(t - t_0) \Longleftrightarrow X(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega t_0}\,, \tag{8.16c}$$

$$x(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t} \Longleftrightarrow X(\omega + \omega_0)\,, \tag{8.16d}$$

ki opisujejo po vrsti časovno in frekvenčno povečavo ter časovni in frekvenčni premik.

Fourierovo transformiranko $X(\omega)$ pogosto zapišemo z eksponentno funkcijo:

$$X(\omega) = |X(\omega)|\,\mathrm{e}^{i\varphi(\omega)}\,, \tag{8.17}$$

kjer sta $|X(\omega)|$ amplituda in $\varphi(\omega)$ faza:

$$|X(\omega)| = \sqrt{\Re\left[X(\omega)\right]^2 + \Im\left[X(\omega)\right]^2}\,, \qquad \varphi(\omega) = \arctan\frac{\Im\left[X(\omega)\right]}{\Re\left[X(\omega)\right]}\,. \tag{8.18}$$

Omenimo še, da je amplituda $|X(\omega)|$ soda funkcija krožne frekvence ω, medtem ko je faza $\varphi(\omega)$ liha funkcija. Zato pri praktičnem delu običajno omejimo prikaza amplitude in faze le na pozitivne ω.