

### Dodatna naloga 3

Za narisani obremenitveni primer določite komponente napetostnih vektorjev na ravninah ② in ③ za ravnovesje (ravnini nista neobremenjeni). Izračunajte tudi komponente napetostnega tenzorja v danem koordinatnem sistemu.

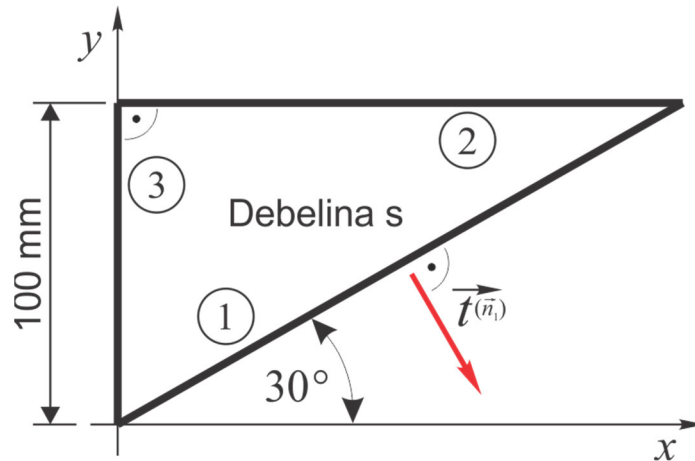
Podatki:

$$|\vec{t}^{(\vec{n}_1)}| = 60 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xx} = 20 \text{ MPa}$$

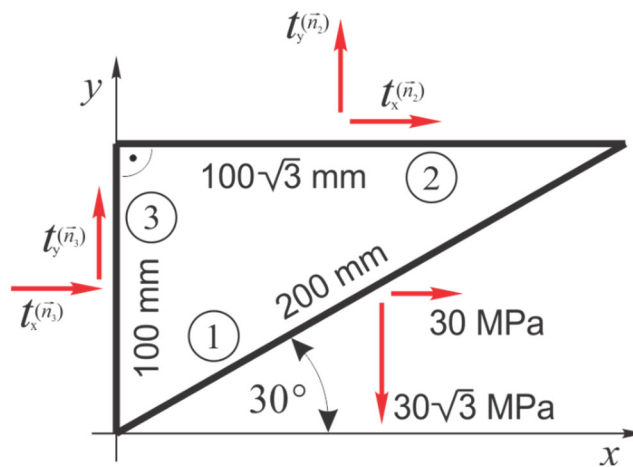
a)  $\vec{t}^{(\vec{n}_2)}, \vec{t}^{(\vec{n}_3)} = ?$

b)  $(\sigma_{ij}) = ?$



Rešitve:

a) V prvem koraku si lahko zapišemo znane komponente napetostnih vektorjev, izračunamo dolžine stranic in narišemo vse znane in neznanе komponente napetostnih vektorjev na robovih:

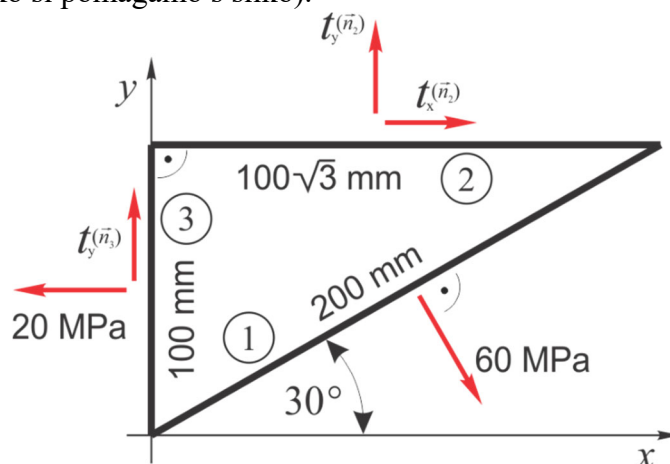


$$\vec{t}^{(\vec{n}_1)} = (30; -30\sqrt{3}) \text{ MPa}$$

Opazimo, da je podana komponenta napetostnega tenzorja  $\sigma_{xx}$ , ki je tudi komponenta napetostnega vektorja na ravnini ③ in sicer je povezana s komponento napetostnega vektorja  $t_x^{(\vec{n}_3)}$  (pozimo na predznake, lahko si pomagamo s sliko).

$$\sigma_{xx} = 20,0 \text{ MPa}$$

$$t_x^{(\vec{n}_3)} = -20,0 \text{ MPa}$$



Manjkajo nam še komponente napetostnih vektorjev  $t_x^{(\vec{n}_2)}$ ,  $t_y^{(\vec{n}_2)}$  in  $t_y^{(\vec{n}_3)}$ . Za statično ravnovesje morajo biti v ravnini izpolnjene 3 ravnovesne enačbe statike (momenta ravnovesna enačba je zapisana za točko v koordinatnem izhodišču). Zapišemo lahko:

$$\sum_i F_{ix} = 0 \Rightarrow 60 \text{ MPa} \cdot \cos 60^\circ \cdot 200 \text{ mm} \cdot s + t_x^{(\vec{n}_2)} \cdot 100 \cdot \sqrt{3} \text{ mm} \cdot s - 20 \text{ MPa} \cdot 100 \text{ mm} \cdot s = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \Rightarrow -60 \text{ MPa} \cdot \sin 60^\circ \cdot 200 \text{ mm} \cdot s + t_y^{(\vec{n}_2)} \cdot 100 \cdot \sqrt{3} \text{ mm} \cdot s + t_y^{(\vec{n}_3)} \cdot 100 \text{ mm} \cdot s = 0$$

$$\sum_i M_{i0} = 0 \Rightarrow -60 \text{ MPa} \cdot 200 \text{ mm} \cdot s \cdot 100 \text{ mm} + t_y^{(\vec{n}_2)} \cdot 100 \cdot \sqrt{3} \text{ mm} \cdot s \cdot 50 \cdot \sqrt{3} \text{ mm} - t_x^{(\vec{n}_2)} \cdot 100 \cdot \sqrt{3} \text{ mm} \cdot s \cdot 100 \text{ mm} + 20 \text{ MPa} \cdot 100 \text{ mm} \cdot s \cdot 50 \text{ mm} = 0$$

Iz prve ravnovesne enačbe dobimo:

$$t_x^{(\vec{n}_2)} = -23,094 \text{ MPa}$$

Iz momentne enačbe zatem izračunamo  $t_y^{(\vec{n}_2)}$ :

$$t_y^{(\vec{n}_2)} = 46,666 \text{ MPa}$$

Iz druge ravnovesne enačbe končno lahko izračunamo še  $t_y^{(\vec{n}_3)}$ :

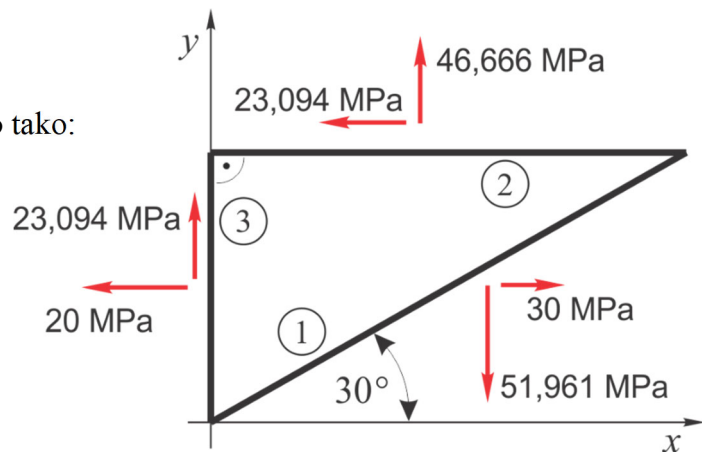
$$t_y^{(\vec{n}_3)} = 23,094 \text{ MPa}$$

Napetostni vektorji na robovih telesa so tako:

$$\vec{t}^{(\vec{n}_1)} = (30,000; -30\sqrt{3}) \text{ MPa}$$

$$\vec{t}^{(\vec{n}_2)} = (-23,094; 46,666) \text{ MPa}$$

$$\vec{t}^{(\vec{n}_3)} = (-20,000; 23,094) \text{ MPa}$$



Manjkajoče komponente napetostnega tenzorja ( $\sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}$ ) lahko sedaj preberemo neposredno iz zgornje slike:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 20,000 & -23,094 \\ -23,094 & 46,666 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Lahko pa zapišemo Cuchy-jev stavek za dve nevzporedni ravnini (npr. ravnini ② in ③):

- ravnina ③:

$$\vec{t}^{(\vec{n}_3)} = (t_x^{(\vec{n}_3)}; t_y^{(\vec{n}_3)}) = (-20,000; 23,094) \text{ MPa}$$

$$\vec{n}_3 = (-1; 0)$$

$$1) t_x^{(\vec{n}_3)} = \sigma_{xx}n_{3x} + \sigma_{xy}n_{3y}$$

$$2) t_y^{(\vec{n}_3)} = \sigma_{xy}n_{3x} + \sigma_{yy}n_{3y}$$

---

$$1) -20,000 \text{ MPa} = \sigma_{xx} \cdot (-1) + \sigma_{xy} \cdot 0 \Rightarrow \sigma_{xx} = 20,000 \text{ MPa}$$

$$2) 23,094 \text{ MPa} = \sigma_{xy} \cdot (-1) + \sigma_{yy} \cdot 0 \Rightarrow \sigma_{xy} = -23,094 \text{ MPa}$$

- ravnina ②:

$$\vec{t}^{(\vec{n}_2)} = (t_x^{(\vec{n}_2)}; t_y^{(\vec{n}_2)}) = (-23,094; 46,666) \text{ MPa}$$

$$\vec{n}_2 = (0; 1)$$

$$1) t_x^{(\vec{n}_2)} = \sigma_{xx}n_{2x} + \sigma_{xy}n_{2y}$$

$$2) t_y^{(\vec{n}_2)} = \sigma_{xy}n_{2x} + \sigma_{yy}n_{2y}$$

---

$$1) -23,094 \text{ MPa} = 20 \text{ MPa} \cdot 0 + \sigma_{xy} \cdot 1 \Rightarrow \sigma_{xy} = -23,094 \text{ MPa}$$

$$2) 46,666 \text{ MPa} = -23,094 \text{ MPa} \cdot 0 + \sigma_{yy} \cdot 1 \Rightarrow \sigma_{yy} = 46,666 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 20,000 & -23,094 \\ -23,094 & 46,666 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Preverite še, če je Cauchy-jev stavek izpolnjen na tudi ravnini ①:

$$\vec{t}^{(\vec{n}_1)} = (30,000; -30\sqrt{3}) \text{ MPa}$$

$$\vec{n}_1 = (\cos 60^\circ; -\sin 60^\circ)$$