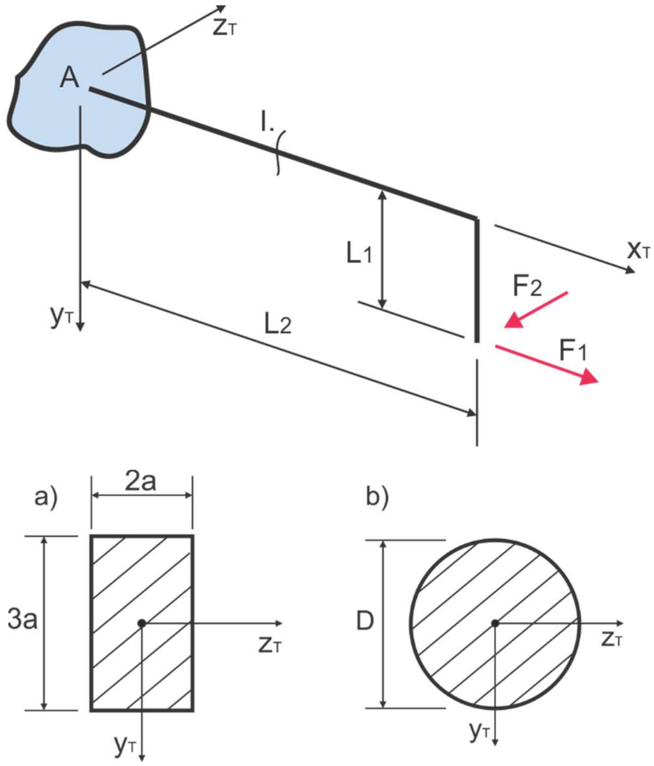
Dodatna naloga 1

1.) Dimenzionirajte konzolno vpet nosilec na spodnji sliki za primer pravokotnega prereza (slika a) in okroglega prereza (slika b). Vpliv notranjih strižnih sil in notranje osne sile zanemarite. Uporabite Huber-jevo porušitveno hipotezo.



Podatki:

$F_1 = 1000$ N

$F_2 = 500$ N

$L_1 = 1$ m

$L_2 = 3$ m

$\sigma_{\mathrm{DOP}} = 140$ MPa

---

a) $a = ?$

b) $D = ?$

Izračunamo notranje sile in momente. Reakcijskih sil in momentov ni potrebno računati, če nosilec po polju I. režemo tako, da nam ostane desni del nosilca. Če bi nosilec rezali tako, da nam ostane levi del, pa bi morali upoštevati tudi reakcijske sile in momente v konzolni podpori A. Izberemo si, da režemo tako, da nam ostane desni del, in zapišemo ravnovesne enačbe za notranje sile in momente:

Polje I:

$N - F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad N = F_1$

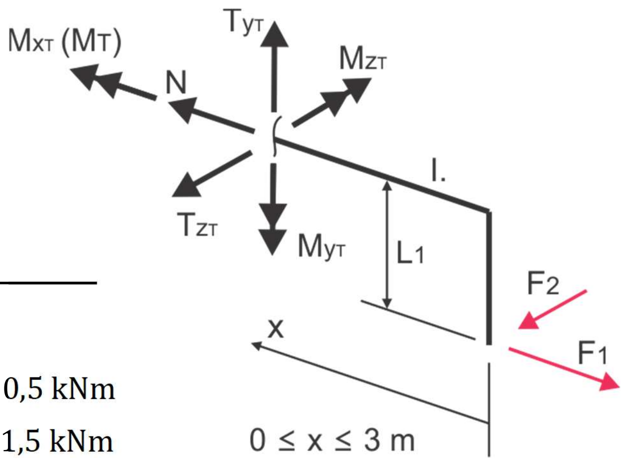
$T_{y_T} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{y_T} = 0$

$T_{z_T} + F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{z_T} = -F_2$

$M_{x_T} + F_2 \cdot L_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{x_T} = -F_2 \cdot L_1$

$M_{y_T} + F_2 \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{y_T} = -F_2 \cdot x$

$M_{z_T} - F_1 \cdot L_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{z_T} = F_1 \cdot L_1$



$N = 1000$ N, $\quad T_{y_T} = 0, \quad T_{z_T} = -500$ N

$x = 0$: $\quad M_{x_T} = -0{,}5$ kNm $\qquad x = 3$ m: $\quad M_{x_T} = -0{,}5$ kNm

$M_{y_T} = 0$ kNm $\qquad M_{y_T} = -1{,}5$ kNm

$M_{z_T} = 1{,}0$ kNm $\qquad M_{z_T} = 1{,}0$ kNm

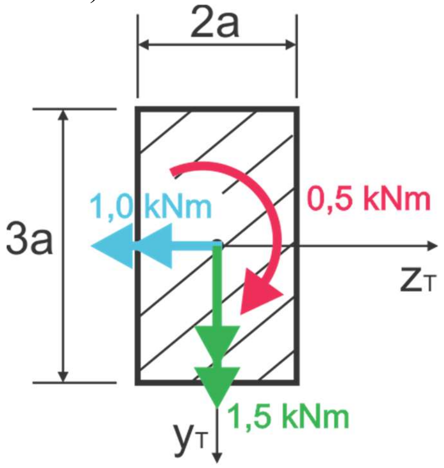
Dva notranja momenta (M_{x_T} in M_{z_T}) sta konstantna po polju, medtem ko je notranji upogibni moment M_{y_T} linearna fukcija, ki ima na desnem robu polja vrednost 0, v levem robu polja (na mestu konzolne podpore A) pa največjo (absolutno) vrednost. Najbolj obremenjena točka na nosilcu je tako točka A (mesto konzolnega vpetja nosilca).

b) Pravokotni prerez na mestu konzolnega vpetja (točka A):

$M_{x_T} = -0{,}5\ \mathrm{kNm}$

$M_{y_T} = -1{,}5\ \mathrm{kNm}$

$M_{z_T} = 1{,}0\ \mathrm{kNm}$



V točki A je nosilec obremenjen s torzijskim momentov M_{x_T}, upogibnim momentom okrog horizontalne težiščne koordinatne osi M_{z_T} ter z upogibnim momentom okrog vertikalne težiščne koordinatne osi M_{y_T}. Koordinatni osi y_T in z_T sta simetrijski osi prereza in tako tudi glavni vztrajnostni osi prereza. Ker imamo komponento upogibnega momenta v obeh glavnih vztrajnostnih oseh prereza, imamo v točki A kombinacijo poševnega upogiba in torzije. Najprej obravnavamo napetosti zaradi upogibnih momentov. Napetosti pri poševnem upogibu izračunamo po enačbi:

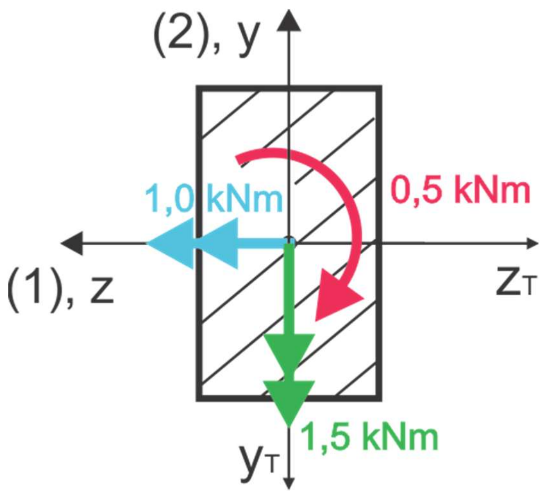
$$\sigma_{xx} = \frac{M_1}{I_1} y - \frac{M_2}{I_2} z$$

Izračunamo glavna vztrajnostna momenta prereza I_1 in I_2. Ker sta osi y_T in z_T glavni vztrajnostni osi prereza, bosta vztrajnostna momenta prereza okrog teh dveh osi zagotovo tudi glavna vztrajnostna momenta prereza. Dobimo:

$$I_{y_T} = \frac{3a \cdot (2a)^3}{12} = 2a^4 = I_2$$

$$I_{z_T} = \frac{2a \cdot (3a)^3}{12} = 4{,}5a^4 = I_1$$

Iz zgornjih rezultatov lahko ugotovimo, da os z_T predstavlja prvo glavno vztrajnostno os prereza, os y_T pa sovpada z drugo glavno vztrajnostno osjo. Na glavne osi sedaj postavimo koordinatni sistem glavnih vztrajnostnih osi, pri čemer prvo glavno vztrajnostno os označimo kot z-os, drugo glavno vztrajnostno os pa kot y-os. Koordinatna sistema $y - z$ in $y_T - z_T$ morata biti istosučna. To bi lahko enostavno izpolnili tako, da bi os z usmerili enako kot os z_T, os y pa enako kot os y_T, vendar bomo za spremembo tokrat uporabili obratno usmerjene koordinatne osi v koordinatnem sistemu glavnih osi (glej sliko ↑). Končni rezultat mora biti enak, ne glede na izbrano usmerjenost. Komponenti momenta okrog prve (z) in druge (y) glavne vztrajnostne osi znašata (predznak lahko razberemo iz slike):

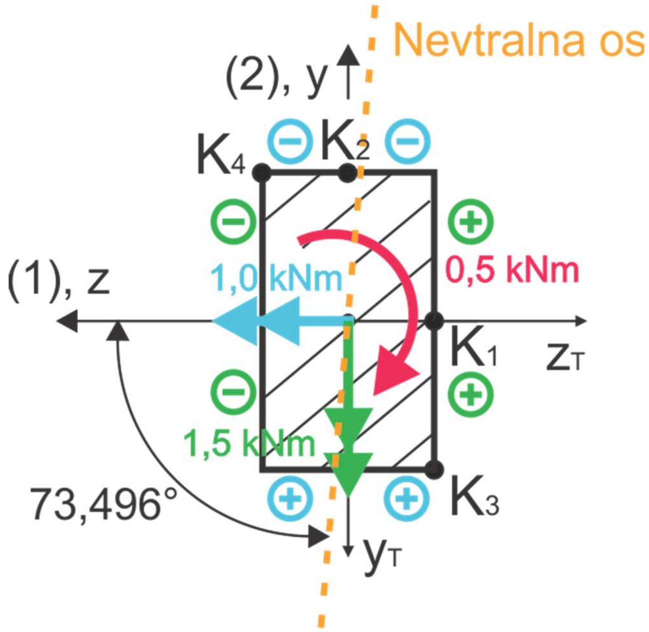


$$M_1 = -1{,}0\ \mathrm{kNm}, \qquad M_2 = 1{,}5\ \mathrm{kNm}$$

Za iskanje najbolj obremenjene točke prereza izračunamo še položaj nevtralne osi:

$$\tan\beta = \frac{I_1 M_2}{I_2 M_1} = \frac{4{,}5a^4}{2a^4} \frac{1{,}5\ \text{kNm}}{(-1{,}0\ \text{kNm})} = -3{,}375 \quad \Rightarrow \quad \beta = -73{,}496°$$

Točka, ki je najbolj oddaljena od nevtralne osi, je točka K_3, zaradi česar moramo obvezno izračunati vrednost primerjalne napetosti v tej točki (upogibne napetosti so tu največje). Po absolutni vrednosti so upogibne napetosti enako velike tudi v točki K_4, le da so tukaj nasprotnega predznaka (K_3 – največja natezna upogibna napetost, K_4 – največja tlačna upogibna napetost).



Točko K_1 moramo preveriti, ker so tu strižne napetosti največje, poleg tega je ta točka tudi precej oddaljena od nevtralne osi, zaradi česar bodo tudi upogibne napetosti tukaj visoke.

Točka K_2 je bližje nevtralni osi kot točka K_1 (manjše upogibne napetosti), strižne napetosti pa so tudi nižje, kot v točki K_1. Primerjalne napetosti v točki K_2 tako ni potrebno računati, ker je ta točka zagotovo manj obremenjena, kot točka K_1.

* Dimenzioniranje, točka K_1:

$$\tau_{K_1} = \tau_{\text{MAX}} = \frac{M_{x_T}}{W_{T,K_1}}$$

$$M_{x_T} = -0{,}5\ \text{kNm}$$

$$W_{T,K_1} = W_{T,\text{MIN}} = \frac{c_1}{c_2} \cdot 3a \cdot a^2, \qquad n = \frac{3a}{2a} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0{,}196 \quad c_2 = 0{,}851 \quad c_3 = 0{,}859$$

$$\tau_{K_1} = \frac{M_{x_T}}{W_{T,K_1}} = \frac{-0{,}5 \cdot 10^6\ \text{Nmm}}{\frac{0{,}196}{0{,}851} \cdot 3a \cdot (2a)^2} = -\frac{180909{,}9\ \text{Nmm}}{a^3}$$

$$\sigma_{xx,K_1} = \sigma_{K_1} = \frac{M_1}{I_1} y_{K_1} - \frac{M_2}{I_2} z_{K_1}$$

$$\sigma_{K_1} = \frac{-1{,}0 \cdot 10^6\ \text{Nmm}}{4{,}5a^4}(0) - \frac{1{,}5 \cdot 10^6\ \text{Nmm}}{2a^4}(-a) = \frac{750000\ \text{Nmm}}{a^3}$$

$$\sigma_{\text{P},K_1} = \sqrt{{\sigma_{K_1}}^2 + 3{\tau_{K_1}}^2} = \sqrt{\left(\frac{750000\ \text{Nmm}}{a^3}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{180909{,}9\ \text{Nmm}}{a^3}\right)^2} \le \sigma_{\text{DOP}}$$

…

$a \geq 17{,}973\ \text{mm}$ (izberemo $a = 18\ \text{mm}$)

* Dimenzioniranje, točka K_3:

$$\tau_{K_3} = 0$$

$$\sigma_{xx,K_3} = \sigma_{K_3} = \frac{M_1}{I_1} y_{K_3} - \frac{M_2}{I_2} z_{K_3}$$

$$\sigma_{K_3} = \frac{-1{,}0 \cdot 10^6 \ \text{Nmm}}{4{,}5a^4}(-1{,}5a) - \frac{1{,}5 \cdot 10^6 \ \text{Nmm}}{2a^4}(-a) = \frac{1083333{,}33 \ \text{Nmm}}{a^3}$$

$$\sigma_{\text{P},K_3} = \sqrt{{\sigma_{K_3}}^2 + 3{\tau_{K_3}}^2} = \sqrt{\left(\frac{1083333{,}33 \ \text{Nmm}}{a^3}\right)^2 + 3 \cdot (0)^2} \leq \sigma_{\text{DOP}}$$

...

$a \geq 19{,}78 \ \text{mm}$ (izberemo $a = 20 \ \text{mm}$)

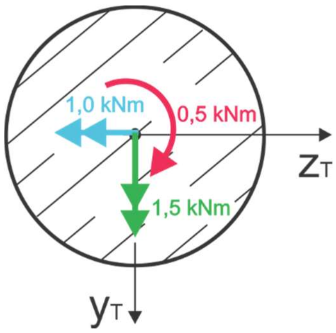
Kritična točka prereza je torej točka K_3. Da prerez zdrži obremenitve v tej točki, pa mora biti dimenzija a večja od 19,78 mm.

c) okrogli prerez na mestu konzolnega vpetja:

$$M_{x_T} = -0{,}5 \text{ kNm}$$

$$M_{y_T} = -1{,}5 \text{ kNm}$$

$$M_{z_T} = 1{,}0 \text{ kNm}$$



Sledimo lahko popolnoma enakemu postopku, kot smo ga uporabili za pravokotni prerez, videli pa bomo, da se nekateri izračuni pri okroglem prerezu poenostavijo. Napetosti pri poševnem upogibu izračunamo po enačbi:

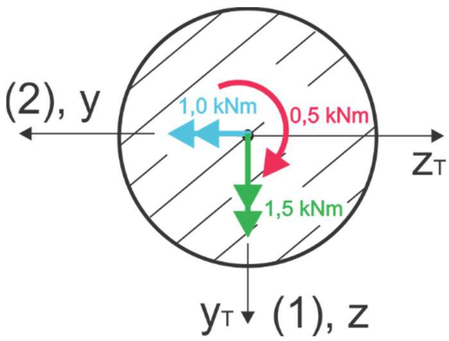
$$\sigma_{xx} = \frac{M_1}{I_1} y - \frac{M_2}{I_2} z$$

Izračunamo glavna vztrajnostna momenta prereza I_1 in I_2. Zopet velja da sta osi y_T in z_T glavni vztrajnostni osi prereza, vztrajnostni moment okrog obeh osi je pa enak. V **tem primeru** si tako lahko **poljubno izberemo**, katera bo naša prva in katera naša druga glavna vztrajnostna os. Za spremembo od zgornjega primera s pravokotnim prerezom si lahko izberemo npr.:

$$I_{y_T} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = I_1$$

$$I_{z_T} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = I_2$$

Na glavne osi prereza postavimo koordinatni sistem glavnih vztrajnostnih osi; prvo glavno vztrajnostno os označimo kot z-os, drugo glavno vztrajnostno os pa kot y-os. Še vedno morata biti koordinatna sistema $y - z$ in $y_T - z_T$ istosučna. Komponenti momenta okrog prve (z) in druge (y) glavne vztrajnostne osi znašata (predznak razberemo iz slike):

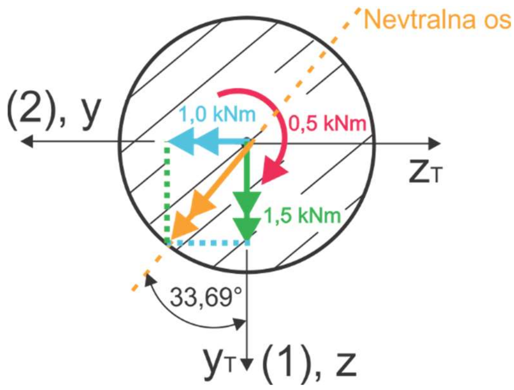


$$M_1 = -1{,}5 \text{ kNm}, \qquad M_2 = -1{,}0 \text{ kNm}$$

Izračunamo še položaj nevtralne osi:

$$\tan\beta = \frac{\frac{\pi \cdot D^4}{64}(-1{,}0 \text{ kNm})}{\frac{\pi \cdot D^4}{64}(-1{,}5 \text{ kNm})} = 0{,}6667 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = 33{,}69°$$

Ker sta glavna vztrajnostna momenta I_1 in I_2 enaka, se pokrajšata v zgornjem izrazu za izračun položaja nevtralne osi in izkaže se, da nevtralna os leži na isti osi kot rezultanta notranjih upogibnih momentov (slika desno, rezultanta je označena z oranžno barvo). Nevtralna os je ravno tako ena od glavnih vztrajnostnih osi prereza (pri okroglem prerezu so vse težiščne osi tudi glavne vztrajnostne osi), tako da lahko takšen primer obravnavamo tudi kot **čisti upogib okrog nevtralne osi**.



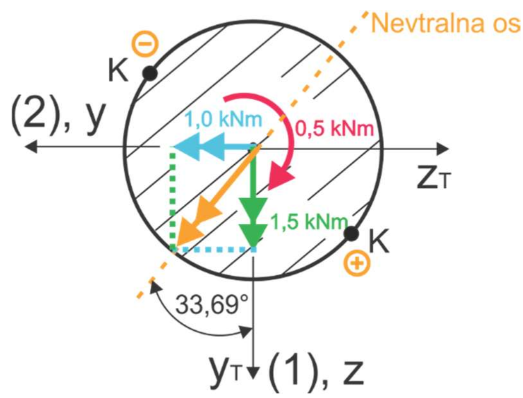
Velikost celotnega vektorja notranjega gibnega momenta izračunamo iz Pitagorovega izreka:

$$M_{NO} = \sqrt{{M_1}^2 + {M_2}^2} = 1{,}803\ \text{kNm}$$

Vztrajnostni moment prereza okrog nevtralne osi znaša:

$$I_{NO} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = I_1 = I_2$$

Največje upogibne napetosti nastopijo v točkah, ki so najbolj oddaljene od nevtralne osi (točki K na desni sliki). Ker primer sedaj obravnavamo kot čisti upogib, lahko upogibne napetosti v točkah K izračunamo po enačbi:



$$\sigma_K = \pm \frac{M_{NO}}{I_{NO}} \frac{D}{2}$$

$D/2$ predstavlja razdaljo točk K od nevtralne osi. Predznak napetosti je pri takšni obravnavi potrebno razbrati **iz slike**. Za upogibno napetost v točki K spodaj desno dobimo:

$$\sigma_K = \frac{M_{NO}}{I_{NO}} \frac{D}{2} = \frac{1{,}803 \cdot 10^6\ \text{Nmm}}{\frac{\pi \cdot D^4}{64}} \frac{D}{2} = \frac{18365207{,}2\ \text{Nmm}}{D^3}$$

Za vajo: Namesto kot čisti upogib okrog nevtralne osi, primer obravnavajte »klasično« in uporabite naslednjo enačbo za izračun največjih upogibnih napetosti v prerezu (potrebujemo le prave koordinate točke K v koordinatnem sistemu glavnih vztrajnostnih osi):

$$\sigma_K = \frac{M_1}{I_1} y_K - \frac{M_2}{I_2} z_K \quad \text{(rezultat mora biti enak)}$$

Torzijske strižne napetosti so največje na obodu okroglega prereza in so enako velike v vseh točkah na obodu, tudi v točki K, ki je tako zagotovo najbolj obremenjena točka prereza. Strižne napetosti izračunamo po enačbi:

$$\tau_\text{K} = \tau_\text{MAX} = \frac{M_{x_T}}{W_{T,\text{MIN}}}$$

$$M_{x_T} = -0{,}5\ \text{kNm}, \qquad W_{T,\text{MIN}} = \frac{\pi D^3}{16}$$

$$\tau_\text{K} = \frac{M_{x_T}}{W_{T,\text{MIN}}} = \frac{16 \cdot -0{,}5\ \cdot 10^6\ \text{Nmm}}{\pi D^3} = -\frac{2546479{,}1\ \text{Nmm}}{D^3}$$

Uporabimo Huber-jevo porušitveno hipotezo in dimenzioniramo prerez:

$$\sigma_{\text{P},K} = \sqrt{{\sigma_K}^2 + 3{\tau_K}^2} = \sqrt{\left(\frac{18365207{,}2\ \text{Nmm}}{D^3}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{2546479{,}1\ \text{Nmm}}{D^3}\right)^2} \leq \sigma_\text{DOP}$$

$$\ldots \quad D \geq 51{,}29\ \text{mm} \quad (\text{izberemo } D = 52\ \text{mm})$$