

### Dodatna naloga 3

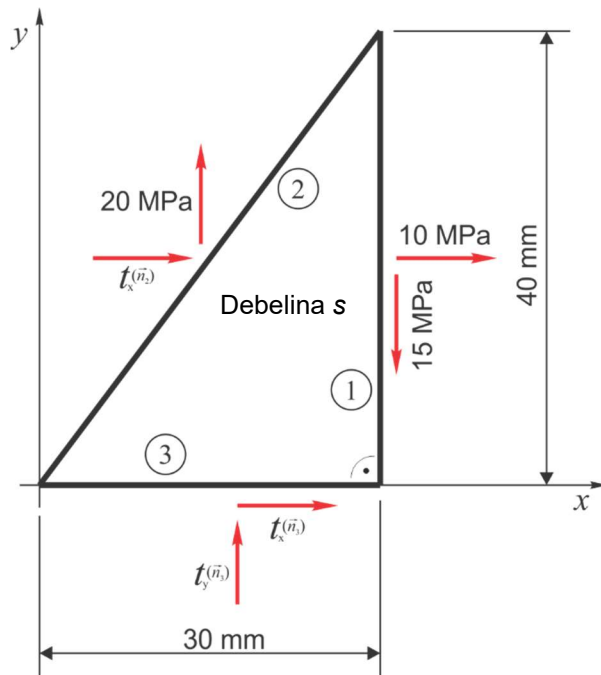
Za narisani obremenitveni primer določite manjkajoče komponente napetostnih vektorjev na ravninah ② in ③ za ravnovesje. Izračunajte tudi komponente napetostnega tenzorja, velikost glavnih normalnih in maksimalnih strižnih napetosti ter ravnine, na katerih delujejo.

a)  $\vec{t}^{(\vec{n}_2)}, \vec{t}^{(\vec{n}_3)} = ?$

b)  $(\sigma_{ij}) = ?$

c)  $\sigma_{1,2} = ? \quad \alpha_1 = ? \quad \alpha_2 = ?$

d)  $\sigma_{t,max} = ?$



Rešitve:

a) Iz slike lahko preberemo komponente napetostnega vektorja na ravnini ① in eno komponento napetostnega vektorja na ravnini ②:

$$\vec{t}^{(\vec{n}_1)} = (10,000; -15,000) \text{ MPa}$$

$$\vec{t}^{(\vec{n}_2)} = ( ? ; 20,000) \text{ MPa}$$

Prav tako iz slike (ali iz zapisa Cauchy-jevega stavka za ravnino ①) lahko razberemo vrednosti nekaterih komponent napetostnega tenzorja:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 10,000 & -15,000 \\ ? & ? \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

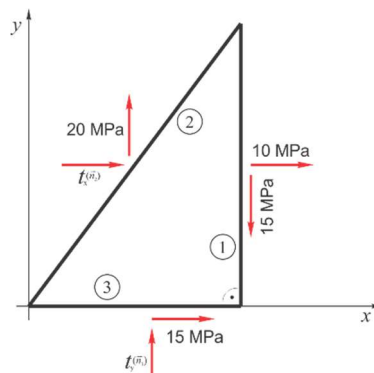
Ker vemo, da mora za ravnovesje momentov vedno veljati  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ , lahko zapišemo:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 10,000 & -15,000 \\ -15,000 & ? \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Opazimo, da je komponenta napetostnega tenzorja  $\sigma_{yx}$  tudi komponenta napetostnega vektorja na ravnini ③ in sicer je povezana s komponento  $t_x^{(\vec{n}_3)}$  (pazimo na predznake, lahko si pomagamo s sliko):

$$t_x^{(\vec{n}_3)} = 15,000 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -15,000 \text{ MPa}$$



Manjkata nam še komponenti napetostnih vektorjev  $t_x^{(\vec{n}_2)}$  in  $t_y^{(\vec{n}_3)}$ . Za statično ravnovesje morajo biti v ravnini izpolnjene 3 ravnovesne enačbe statike (momenta ravnovesna enačba je zapisana za točko v koordinatnem izhodišču):

$$\sum_i F_{ix} = 0 \Rightarrow 10 \text{ MPa} \cdot 40 \text{ mm} \cdot s + t_x^{(\vec{n}_2)} \cdot 50 \text{ mm} \cdot s + 15 \text{ MPa} \cdot 30 \text{ mm} \cdot s = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \Rightarrow -15 \text{ MPa} \cdot 40 \text{ mm} \cdot s + 20 \text{ MPa} \cdot 50 \text{ mm} \cdot s + t_y^{(\vec{n}_3)} \cdot 30 \text{ mm} \cdot s = 0$$

$$\sum_i M_{i0} = 0 \quad \downarrow$$

$$-10 \text{ MPa} \cdot 40 \text{ mm} \cdot s \cdot 20 \text{ mm} - 15 \text{ MPa} \cdot 40 \text{ mm} \cdot s \cdot 30 \text{ mm} - t_x^{(\vec{n}_2)} \cdot 50 \text{ mm} \cdot s \cdot 20 \text{ mm} + 20 \text{ MPa} \cdot 50 \text{ mm} \cdot s \cdot 15 \text{ mm} + t_y^{(\vec{n}_3)} \cdot 30 \text{ mm} \cdot s \cdot 15 \text{ mm} = 0$$

Iz prve ravnovesne enačbe dobimo:

$$t_x^{(\vec{n}_2)} = \frac{-15 \text{ MPa} \cdot 30 \text{ mm} - 10 \text{ MPa} \cdot 40 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = -17 \text{ MPa}$$

Iz druge in tretje ravnovesne enačbe pa dobimo enak rezultat:

$$t_y^{(\vec{n}_3)} = -13,333 \text{ MPa}$$

**b)** Iz zapisa Cauchy-jevega stavka za ravnino ③ lahko določimo še  $\sigma_{yy}$ :

$$\vec{t}^{(\vec{n}_3)} = (t_x^{(\vec{n}_3)}; t_y^{(\vec{n}_3)}) = (15,000; -13,333) \text{ MPa}$$

$$\vec{n}_3 = (0; -1)$$

$$1) t_x^{(\vec{n}_3)} = \sigma_{xx}n_{3x} + \sigma_{xy}n_{3y}$$

$$2) t_y^{(\vec{n}_3)} = \sigma_{xy}n_{3x} + \sigma_{yy}n_{3y}$$

$$1) 15 \text{ MPa} = 10 \text{ MPa} \cdot 0 + (-15 \text{ MPa}) \cdot (-1) = 15 \text{ MPa} - \text{že izpolnjena enačba}$$

$$2) -13,333 \text{ MPa} = (-15 \text{ MPa}) \cdot 0 + \sigma_{yy} \cdot (-1) \Rightarrow \sigma_{yy} = 13,333 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 10,000 & -15,000 \\ -15,000 & 13,333 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

**c)** Za izračun glavnih normalnih napetosti uporabimo enačbo:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = 11,666 \text{ MPa} \pm 15,092 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 26,758 \text{ MPa}, \sigma_2 = -3,426 \text{ MPa}$$

Določimo še ravnine glavnih normalnih napetosti:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = 9,001$$

$$2\alpha = 83,660^\circ + k \cdot 180^\circ \Rightarrow \alpha = 41,830^\circ + k \cdot 90^\circ, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Preverimo, kateri glavni napetosti pripada katera ravnina:

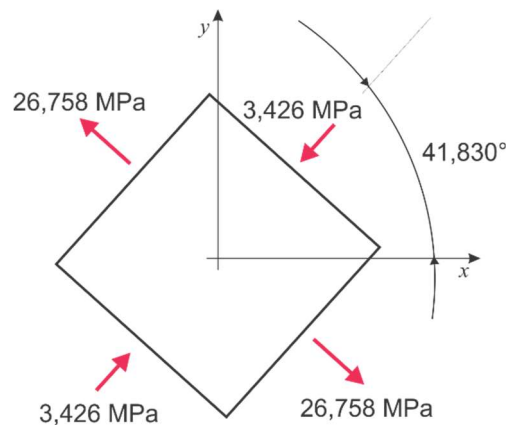
$$\sigma_n^{(\bar{n})} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \sigma_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_n^{(\bar{n})}(\varphi = 41,830^\circ) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(83,660^\circ) + \sigma_{xy} \sin(83,660^\circ)$$

$$\sigma_n^{(\bar{n})}(\varphi = 41,830^\circ) = -3,426 \text{ MPa} = \sigma_2 \Rightarrow \alpha_2 = 41,830^\circ$$

$$\sigma_n^{(\bar{n})}(\varphi = 131,830^\circ) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(263,660^\circ) + \sigma_{xy} \sin(263,660^\circ)$$

$$\sigma_n^{(\bar{n})}(\varphi = 131,830^\circ) = 26,758 \text{ MPa} = \sigma_1 \Rightarrow \alpha_1 = 131,830^\circ$$



d) Izračunamo še vrednost maksimalnih strižnih napetosti:

$$\sigma_{t,\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm 15,092 \text{ MPa}$$

Maksimalne strižne napetosti se pojavijo na ravninah, ki so pod kotom  $45^\circ$  glede na ravnine glavnih normalnih napetosti. Ena ravnina bo torej pri kotu:

$$\varphi = \alpha_2 + 45^\circ = 86,830^\circ$$

Določimo usmerjenost strižne napetosti na tej ravnini:

$$\sigma_t^{(\bar{n})}(\varphi = 86,830^\circ) = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2} \sin 2\varphi + \sigma_{xy} \cos 2\varphi = +15,092 \text{ MPa}$$

Normalne napetosti na ravninah maksimalnih strižnih napetosti znašajo:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = 11,666 \text{ MPa}$$

