

Trdnost 2019/2020 – Dodatna naloga 13 – Uklon

1.) Dimenzionirajte narisano paličje. Tlačno obremenjene palice lahko uklonijo.

$$\sigma_M = 360 \text{ MPa}$$

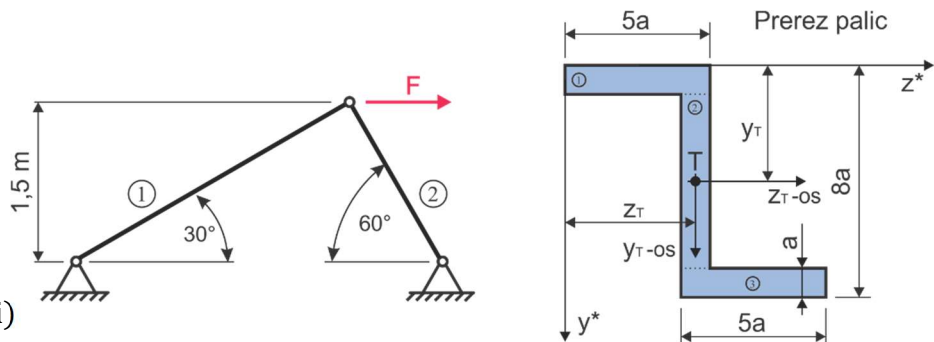
$$\sigma_{PL} = 250 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{PR} = 190 \text{ MPa}$$

$$F = 10 \text{ kN}$$

$$n = 6 \text{ (faktor varnosti)}$$

$$E = 210000 \text{ MPa}$$



$$a = ?$$

Rešitev:

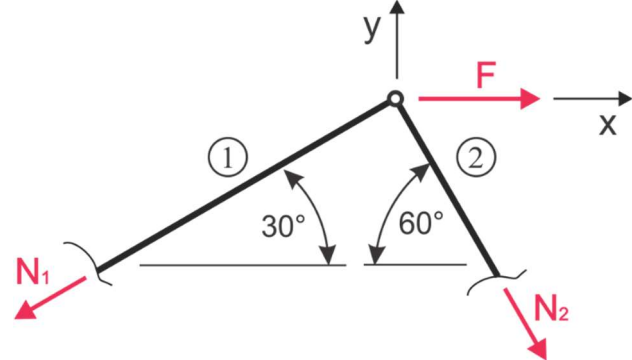
a) Izračunamo notranji osni sili v palicah. Izrežemo vozlišče, kjer se palici stikata:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad F + N_2 \cos 60^\circ - N_1 \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -N_2 \sin 60^\circ - N_1 \sin 30^\circ = 0$$

$$N_1 = \frac{F}{\frac{\sin 30^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} + \cos 30^\circ} = 8660,254 \text{ N}$$

$$N_2 = -\frac{N_1 \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = -5000 \text{ N}$$



b) Notranja sila v palici 1 je natezna. Ta palica zagotovo ne bo uklonila in jo lahko dimenzioniramo na mejo tečenja po enačbi:

$$\sigma_{xx,1} = \frac{N_1}{A} \leq \sigma_{DOP} = \frac{\sigma_{PL}}{n}$$

Potrebujemo samo še površino prereza palice A:

$$A = 5a \cdot a + a \cdot 6a + 5a \cdot a = 16a^2$$

Zadnji rezultat vstavimo v enačbo za dimenzioniranje in izračunamo dimenzijo a:

$$\frac{N_1}{A} \leq \frac{\sigma_{PL}}{n}$$

$$\frac{N_1}{16a^2} \leq \frac{\sigma_{PL}}{n}$$

$$a \geq \sqrt{\frac{nN_1}{16\sigma_{PL}}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 8660,254 \text{ N}}{16 \cdot 250 \text{ MPa}}}$$

$$a \geq 3,604 \text{ mm} \quad (a = 3,7 \text{ mm})$$

Za palico 1 mora biti dimenzija a večja od 3,604 mm.

c) Notranja sila v palici 2 je tlačna. Palica 2 lahko ukloni, kar moramo upoštevati pri dimenzioniranju. Izračunati moramo minimalni (oz. po dogovoru drugi glavni) vztrajnostni moment prereza. Prvo izračunamo vztrajnostna momenta in deviacijski moment prereza v težiščnem koordinatnem sistemu $y_T - z_T$. Poiščemo položaj težišča:

$$y_T = \frac{0,5a \cdot 5a \cdot a + 4a \cdot a \cdot 6a + 7,5a \cdot 5a \cdot a}{5a \cdot a + a \cdot 6a + 5a \cdot a} = 4a$$

$$z_T = \frac{2,5a \cdot 5a \cdot a + 4,5a \cdot a \cdot 6a + 6,5a \cdot 5a \cdot a}{5a \cdot a + a \cdot 6a + 5a \cdot a} = 4,5a$$

Izračunamo težiščni vztrajnostni moment okoli težiščne z_T - osi:

$$I_{z_T} = \frac{5a \cdot a^3}{12} + \frac{a \cdot (6a)^3}{12} + \frac{5a \cdot a^3}{12} + (3,5a)^2 \cdot 5a^2 + (3,5a)^2 \cdot 5a^2 = 141,33a^4$$

Izračunamo težiščni vztrajnostni moment okoli težiščne y_T - osi:

$$I_{y_T} = \frac{a \cdot (5a)^3}{12} + \frac{6a \cdot a^3}{12} + \frac{a \cdot (5a)^3}{12} + (2a)^2 \cdot 5a^2 + (2a)^2 \cdot 5a^2 = 61,33a^4$$

Izračunamo težiščni deviacijski moment v koordinatnem sistemu $y_T - z_T$:

$$I_{y_T z_T} = (-2a) \cdot (-3,5a) \cdot 5a^2 + (2a) \cdot (3,5a) \cdot 5a^2 = 70a^4$$

V koordinatnem sistemu glavnih vztrajnostnih osi je deviacijski vztrajnostni moment vedno enak nič, kar pomeni, da težiščni vztrajnostni osi y_T in z_T nista glavni vztrajnostni osi. Izračunamo glavna vztrajnostna momenta prereza:

$$I_{1,2} = \frac{I_{y_T} + I_{z_T}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_T} - I_{z_T}}{2}\right)^2 + I_{y_T z_T}^2} = 101,33a^4 \pm 80,62a^4$$

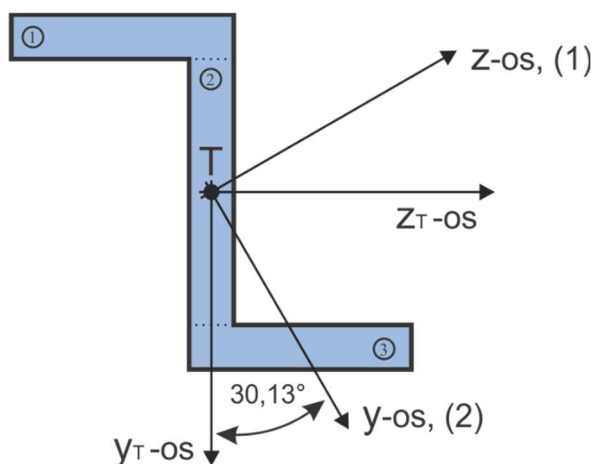
$$I_1 = 181,95a^4$$

$$I_2 = 20,71a^4 = I_{MIN}$$

Izračunamo lahko še lego glavnih vztrajnostnih osi (ta korak ni nujen za dimenzioniranje na uklon, saj potrebujemo le velikost minimalnega vztrajnostnega momenta, kar smo že izračunali):

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{y_T z_T}}{I_{z_T} - I_{y_T}} = \frac{7}{4} \Rightarrow \alpha = 30,13^\circ, \alpha = 120,13^\circ, \dots$$

$$I_u(\varphi = 30,13^\circ) = 20,71a^4 = I_2 \Rightarrow \alpha_2 = 30,13^\circ, \alpha_1 = 120,13^\circ$$



Izračunamo dejansko vitkost (λ_{DEJ}) palice 2:

$$\lambda_{DEJ} = \frac{\beta L}{i_{MIN}}$$

$$\beta = 1, \quad L = \frac{1,5 \text{ m}}{\sin 60^\circ} = \sqrt{3} \text{ m}$$

$$i_{MIN} = \sqrt{\frac{I_{MIN}}{A}} = \sqrt{\frac{20,71a^4}{16a^2}} = 1,1377a$$

$$\lambda_{DEJ} = \frac{\beta L}{i_{MIN}} = \frac{\sqrt{3} \text{ m}}{1,1377a}$$

Predpostavimo, da smo v Tetmajer-jevem področju. Za mehko jeklo ($\sigma_M = 360 \text{ MPa}$) velja:

$$\sigma_{KR} = 310 \text{ MPa} - 1,14 \text{ MPa} \cdot \lambda_{DEJ}$$

Izpeljane izraze vstavimo v enačbo za dimenzioniranje:

$$|\sigma_{xx,2}| = \frac{|N_2|}{A} \leq \sigma_{DOP} = \frac{\sigma_{KR}}{n} = \frac{310 \text{ MPa} - 1,14 \text{ MPa} \cdot \lambda_{DEJ}}{n}$$

$$\frac{|N_2|}{A} \leq \frac{310 \text{ MPa} - 1,14 \text{ MPa} \cdot \lambda_{DEJ}}{n}$$

$$\frac{|N_2|}{16a^2} \leq \frac{310 \text{ MPa} - 1,14 \text{ MPa} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 1000 \text{ mm}}{1,1377a}}{n}$$

$$n|N_2| \leq 16a^2 \left(310 \text{ MPa} - 1,14 \text{ MPa} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 1000 \text{ mm}}{1,1377a} \right)$$

$$310 \text{ MPa} \cdot 16a^2 - 1,14 \text{ MPa} \cdot \sqrt{3} \cdot 1000 \text{ mm} \cdot 14,063a - n|N_2| \geq 0$$

Rešitvi zgornje kvadratne neenačbe sta:

$$a \geq 6,53 \text{ mm}$$

$$a \leq -0,927 \text{ mm}$$

Fizikalno sprejemljiv rezultat je tako:

$$a \geq 6,53 \text{ mm} \quad (a = 6,6 \text{ mm})$$

Preverimo, če smo dejansko v Tetmajer-jevem področju. Izračunamo dejansko vitkost palice:

$$\lambda_{DEJ} = \frac{\beta L}{i_{MIN}} = \frac{\sqrt{3} \text{ m}}{1,1377a} = 233,14$$

Izračunamo zgornjo (»desno«) mejo Tetmajer-jevega področja:

$$\lambda_{PR} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{PR}}} = 104,44$$

Spodnje (»levo«) meje področja ni potrebno računati, ker smo že ugotovili, da naš rezultat ni v Tetmajer-jevem področju, ampak v Euler-jevem področju. Premaknemo se torej v Euler-jevo področje.

Za kritično uklonsko napetost v Euler-jevem področju velja:

$$\sigma_{KR} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{DEJ}^2}$$

Zgornji izraz stavimo v enačbo za dimenzioniranje:

$$|\sigma_{xx,2}| = \frac{|N_2|}{A} \leq \sigma_{DOP} = \frac{\sigma_{KR}}{n} = \frac{\pi^2 E}{n \lambda_{DEJ}^2}$$

$$\frac{|N_2|}{16a^2} \leq \frac{\pi^2 E}{n \left(\frac{\sqrt{3} \text{ m}}{1,1377a} \right)^2}$$

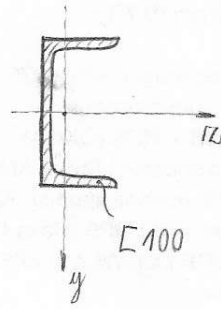
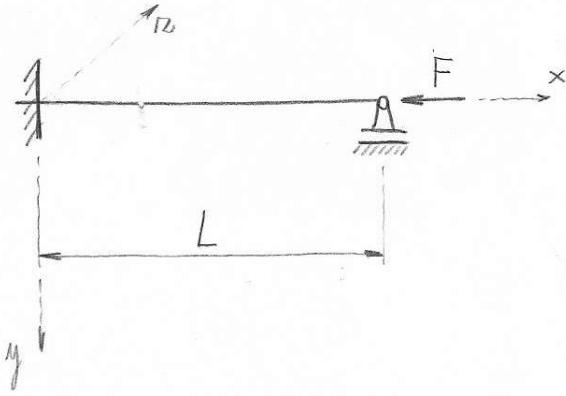
$$a \geq \sqrt[4]{\frac{n|N_2| \left(\frac{\sqrt{3} \cdot 1000 \text{ mm}}{1,1377} \right)^2}{16\pi^2 E}} = 6,767 \text{ mm} \quad (a = 6,8 \text{ mm})$$

Še preverimo, če smo v Euler-jevem področju. Izračunamo dejansko vitkost palice:

$$\lambda_{DEJ} = \frac{\beta L}{i_{\text{MIN}}} = \frac{\sqrt{3} \text{ m}}{1,1377a} = 224,97$$

Še vedno smo v Euler-jevem področju ($\lambda_{DEJ} > \lambda_{PR}$). Za palico 2 mora tako dimenzija a biti večja od 6,767 mm.

Določite silo F in katero lahko obremenimo nosilec.



$$G_M = 500 \text{ MPa}$$

$$G_{PL} = 300 \text{ MPa}$$

$$G_{PR} = 280 \text{ MPa}$$

$$m = 2,5 \text{ - namot}$$

$$L = 1,8 \text{ m}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$F = ?$$

$$I 100 : \quad J_{\min} = J_y = 29,3 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$A = 1350 \text{ mm}^2$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{29,3 \cdot 10^4}{1350}} = 14,732 \text{ mm}$$

$$\lambda_{DEJ} = \frac{\beta \cdot L}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 1800}{14,732} = 85,53$$

$$\lambda_{PR} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{G_{PR}}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{200000}{280}} = 83,96 < 85,53$$

⇓
velja EULER

EULER-jev uklon:

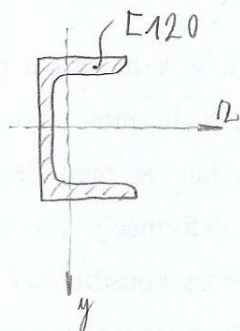
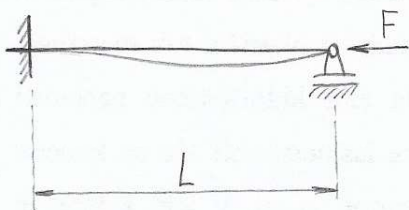
$$F_k = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(nL)^2} = m \cdot F$$

$$F = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{m \cdot (nL)^2}$$

$$F = \frac{\pi^2 \cdot 200000 \cdot 29,3 \cdot 10^4}{2,5 \cdot (0,7 \cdot 1800)^2}$$

$$F = 145719 \text{ N} \approx 145,7 \text{ kN}$$

Določite silo F s katero lahko obremenimo nosilec.



$$\sigma_H = 360 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{PL} = 250 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{PR} = 190 \text{ MPa}$$

$$m = 4 - \text{varnost}$$

$$L = 2,35 \text{ m}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$J_{\min} = 43,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$A = 1700 \text{ mm}^2$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{43,2 \cdot 10^4}{1700}} = 15,941 \text{ mm}$$

$$\beta = 0,7$$

$$\lambda_{DEJ} = \frac{\beta \cdot L}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2350}{15,941} = 103,193$$

$$\lambda_{PR} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{PR}}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{200000}{190}} = 101,927 < \lambda_{DEJ}$$

EULER VELJA

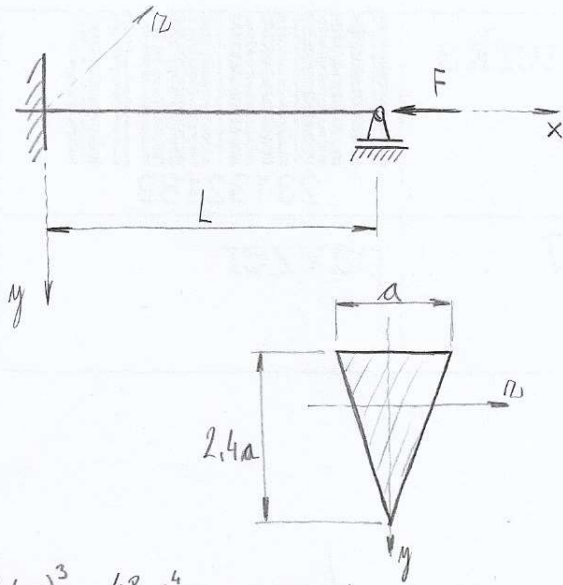
$$F_{KR} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\beta L)^2}$$

$$m \cdot F = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\beta L)^2}$$

$$F = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{m \cdot (\beta L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 200000 \cdot 43,2 \cdot 10^4}{4 \cdot (0,7 \cdot 2350)^2} = 78781,04 \text{ N}$$

$$\underline{\underline{F = 78,781 \text{ kN}}}$$

Dimenzionirajte narisani stebel trikotnega pręčnega prereza ($a = ?$).



$$F = 5 \text{ kN}$$

$$L = 1 \text{ m}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$m = 2,5 - \text{VARNOST}$$

$$G_M = 500 \text{ MPa}$$

$$G_{PL} = 300 \text{ MPa}$$

$$G_{PR} = 280 \text{ MPa}$$

$$J_z = \frac{a \cdot (2,4a)^3}{36} = \frac{48 \cdot a^4}{125} \approx 0,384 \cdot a^4$$

$$J_y = \frac{2,4a \cdot a^3}{48} = \frac{a^4}{20} = 0,05 a^4 = J_{\min}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2,4 \cdot a = 1,2 a^2$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,05 a^4}{1,2 a^2}} = \frac{\sqrt{6}}{12} a \approx 0,2041 \cdot a$$

$$\lambda_{DEJ} = \frac{m \cdot L}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 1000 \cdot 12}{\sqrt{6} \cdot a} = \frac{3429,29}{a}$$

uzamemo: $a = 9,58935 \text{ mm}$

$$\lambda_{DEJ} = 357,614$$

$$G_{PL} = 335 - 0,62 \cdot \lambda_{PL}$$

$$\lambda_{PL} = \frac{335 - 300}{0,62} = 56,45$$

$$G_{PR} = 335 - 0,62 \cdot \lambda_{PR}$$

$$\lambda_{PR} = \frac{335 - 280}{0,62} = 88,71 \text{ ali } \lambda_{PR} = \pi \sqrt{\frac{E}{G_{PR}}}$$

$$\lambda_{PR} = \pi \sqrt{\frac{210000}{280}}$$

$$\lambda_{PR} = 86,036$$

mimo λ TETMAJER-jevem
obm. ampak mo λ EULER-jevem obm.

predpostavimo TETMAJER-jev uklon:

TRDO JEKLO

$$G_K = 335 - 0,62 \cdot \lambda$$

$$\frac{F_K}{A} = 335 - 0,62 \cdot \frac{3429,29}{a} ; F_K = m \cdot |N|$$

$$\frac{m \cdot F}{1,2 a^2} = 335 - 0,62 \cdot \frac{3429,29}{a}$$

$$\frac{2,5 \cdot 5000}{1,2 \cdot a^2} = 335 - \frac{2126,157}{a} \cdot a^2$$

$$\frac{31250}{3} = 335 \cdot a^2 - 2126,157 \cdot a$$

$$a^2 - 6,34674 a - 31,09453 = 0$$

$$a_1 = 9,58935 \text{ mm}$$

$$a_2 = -3,24261 \text{ mm}$$

EULER-jev obm.:

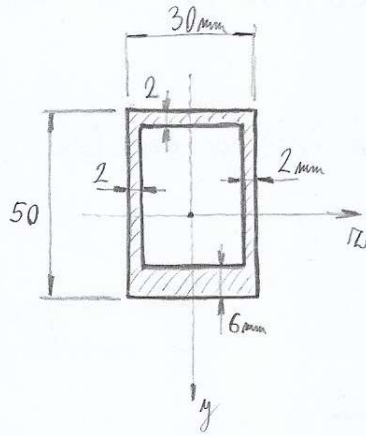
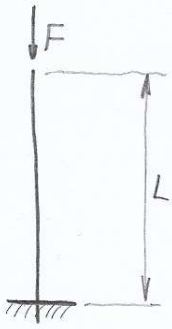
$$F_K = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(mL)^2} ; F_K = m \cdot F$$

$$m \cdot F = \frac{\pi^2 E \cdot a^4}{20 \cdot 0,7^2 \cdot 1000^2}$$

$$2,5 \cdot 5000 = \frac{\pi^2 \cdot 210000 \cdot a^4}{20 \cdot (0,7 \cdot 1000)^2}$$

$$a = 15,592 \text{ mm}$$

$$\lambda_{DEJ} = \frac{3429,29}{15,592} = 219,939 > 86,036 \Rightarrow \text{EULER ner velja!}$$



$$G_n = 360 \text{ MPa}$$

$$G_{PL} = 250 \text{ MPa}$$

$$G_{PR} = 190 \text{ MPa}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$L = 0,65 \text{ m}$$

$$M = 3 - \text{VARNOST}$$

$$\lambda_{DEJ} = \frac{\beta \cdot L}{i_{min}}$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$$

$$J_{min} = J_y = \frac{50 \cdot 30^3}{12} - \frac{42 \cdot 26^3}{12} = 50984 \text{ mm}^4 \quad (14)$$

$$A = 50 \cdot 30 - 42 \cdot 26 = 408 \text{ mm}^2 \quad (2)$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{50984}{408}} = 11,1786 \text{ mm} \quad (2)$$

$$\beta = 2 \quad (2)$$

$$\lambda_{DEJ} = \frac{2 \cdot 650}{11,1786} = 116,294 \quad (2)$$

$$\lambda_{PR} = \pi \sqrt{\frac{E}{G_{PR}}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{190}} = 104,444 < \lambda_{DEJ} \Rightarrow \text{EULER velja} \quad (2)$$

$$F_K = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\beta L)^2} = M \cdot F$$

$$F = \frac{\pi^2 E J_{min}}{m \cdot (\beta L)^2}$$

$$F = \frac{\pi^2 \cdot 210000 \cdot 50984}{3 \cdot (2 \cdot 650)^2} = 20842,26 \text{ N} \quad (9)$$