

Dodatna naloga 11

1.) Izpeljite enačbe za izračun strižnih napetosti zaradi notranje strižne sile za prerez na spodnji sliki. Dimenzionirajte narisani nosilec tako, da bodo strižne napetosti v nosilcu zaradi notranje strižne sile T v dopustnih mejah.

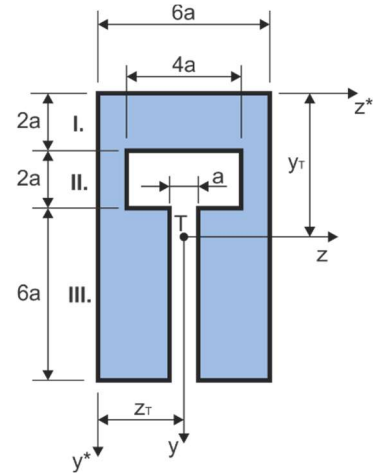
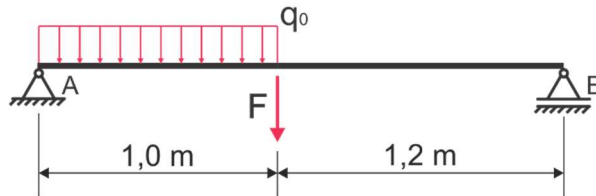
$$F = 17,5 \text{ kN}$$

$$q_0 = 20 \text{ kN/m}$$

$$\sigma_{xy}^{\text{DOP}} = 90 \text{ MPa}$$

a) $\sigma_{xy}(y) = ?$

b) $a = ?$



Rešitev:

a) izračunamo položaj težišča prereza (v koordinatnem sistemu (y^*, z^*)) in vrednost vztrajnostnega momenta prereza okrog težiščne z osi (I_z):

$$y_T = \frac{117}{23} a \approx 5,087a, \quad z_T = 3a$$

$$I_z = \frac{29186}{69} a^4 \approx 422,99a^4$$

- izračunamo strižne napetosti po prerezu. V področju (III.) zgornjega prereza velja:

$$\sigma_{xy} = \frac{TS_{ye}}{bI_z}$$

$$S_{ye} = \int_y^e y b dy = \int_y^{10a - (117/23)a} y \cdot 5a dy \approx 60,345a^3 - 2,5ay^2$$

$$\sigma_{xy} = \frac{T(60,345a^3 - 2,5ay^2)}{5a \cdot 422,99a^4} = \frac{T}{a^2} \left(0,0285 - 0,0012 \frac{y^2}{a^2} \right)$$

Ta enačba velja v področju: $-\frac{117}{23}a + 4a \leq y \leq 10a - \frac{117}{23}a$

- v področju I. velja:

$$\sigma_{xy} = \frac{TS_{ye}}{bI_z}$$

$$S_{ye} = \int_y^e y b dy = \int_y^{- (117/23)a} y \cdot 6a dy = 3a \left(\frac{13689}{529} a^2 - y^2 \right) \approx 77,631a^3 - 3ay^2$$

V zgornji enačbi je uporabljen »trik«. S_{ye} je načeloma statični moment dela prereza, ki ga omejuje koordinata y na eni strani in **spodnja** točka prereza na drugi strani, glede na težiščno os prereza. Po

velikosti je ta statični moment enak statičnemu momentu dela prereza, ki ga omejuje koordinata y na eni strani in **zgornja** točka prereza na drugi, razlikujeta se le po predznaku. Za pravilen predznak pa je poskrbljeno z zamenjavo »smeri« integracije: v področju III. smo izraz integrirali od koordinate y »navzdol« proti spodnjemu robu (kot je matematično pravilno), v področju I. pa od koordinate y »navzgor« proti zgornjemu robu (da upoštevamo razliko v predznakih).

$$\sigma_{xy} = \frac{T(77,631a^3 - 3ay^2)}{6a \cdot 422,99a^4} = \frac{T}{a^2} \left(0,0306 - 0,0012 \frac{y^2}{a^2} \right)$$

Ta enačba velja v področju: $-\frac{117}{23}a \leq y \leq -\frac{117}{23}a + 2a$

- v področju II. velja:

$$\sigma_{xy} = \frac{TS_{ye}}{bI_z}$$

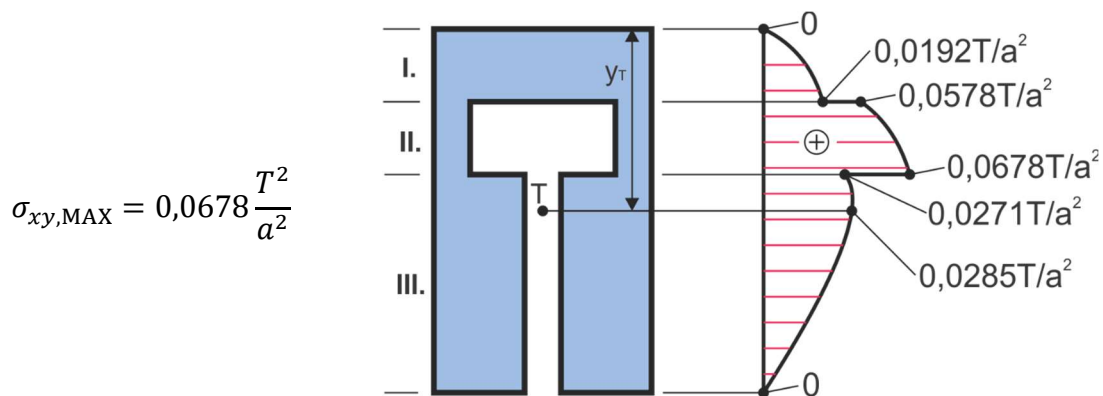
$$S_{ye} = \int_y^e yb dy = \int_y^{-(117/23)a+2a} y \cdot 2a dy + \int_{-(117/23)a+2a}^{-(117/23)a} y \cdot 6a dy$$

$$S_{ye} \approx 58,573a^3 - ay^2$$

$$\sigma_{xy} = \frac{T(58,573a^3 - ay^2)}{2a \cdot 422,99a^4} = \frac{T}{a^2} \left(0,0692 - 0,0012 \frac{y^2}{a^2} \right)$$

Ta enačba velja v področju: $-\frac{117}{23}a + 2a \leq y \leq -\frac{117}{23}a + 4a$

b) največja strižna napetost v prerezu se pojavi v področju II. in sicer na meji s področjem III.:



- izračunamo vrednosti reakcijskih sil v podporah in vrednost največje strižne sile v nosilcu (zanimana največja absolutna vrednost). Dobimo rezultate:

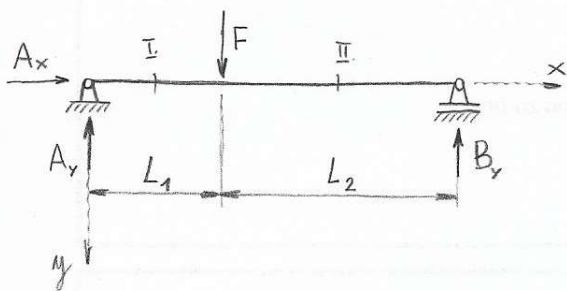
$$A_x = 0, \quad A_y = 25 \text{ kN}, \quad B = 12,5 \text{ kN}$$

$T_{\text{MAX}} = 25 \text{ kN}$ (izkaže se, da se največja strižna sila v nosilcu pojavi na mestu podpore A)

- maksimalna strižna napetost v prerezu mora biti nižja od dopustne vrednosti:

$$\sigma_{xy, \text{MAX}} \leq \sigma_{xy}^{\text{DOP}} \Rightarrow a \geq \sqrt{\frac{0,0678(T_{\text{MAX}})^2}{\sigma_{xy}^{\text{DOP}}}} = 4,34 \text{ mm} \quad (a = 4,4 \text{ mm})$$

Dimenzionirajte nosilec nad podporo ter na največjo upogibno napetost.



$$A_x = 0$$

$$A_y + B_y - F = 0$$

$$F L_1 - B_y \cdot (L_1 + L_2) = 0$$

$$B_y = F \frac{L_1}{L_1 + L_2} = 4 \text{ kN}$$

$$A_y = F \frac{L_2}{L_1 + L_2} = 8 \text{ kN}$$

$$F = 12 \text{ kN}$$

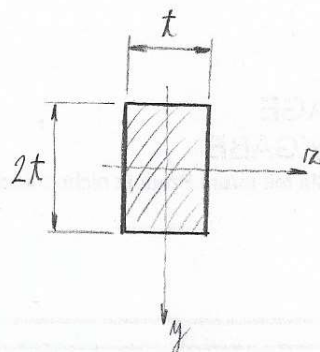
$$L_1 = 0,5 \text{ m}$$

$$L_2 = 1 \text{ m}$$

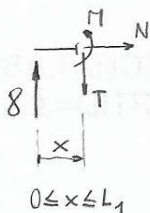
$$\tau_{\text{DOP}} = 90 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{DOP}} = 160 \text{ MPa}$$

$$t = ?$$



I. polje



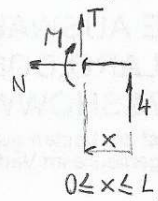
$$N = 0$$

$$T = 8 \text{ kN}$$

$$M = 8 \cdot x$$

$$M_{\text{max}}^{\text{I}} = 8 \cdot 0,5 = 4 \text{ kNm}$$

II. polje



$$N = 0$$

$$T = -4 \text{ kN}$$

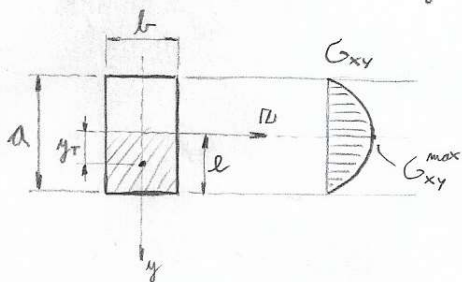
$$M = 4 \cdot x$$

$$M_{\text{max}}^{\text{II}} = 4 \cdot 1 = 4 \text{ kNm}$$

nad podporo A je v nosilec največja strizna sila, matr. up. moment je pa enak nič:

$$\left. \begin{array}{l} T_{\text{max}} = 8 \text{ kN} \\ M = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{dimenzioniramo na strig}$$

$$\tau_{xy}(y) = \frac{T \cdot S_{yz}(y)}{b(y) \cdot J_z} \leq \tau_{\text{DOP}}$$



$$S_{yz}(y=0) = y_T \cdot A_{yz} = \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot b = \frac{a^2 b}{8} = \frac{(2t)^2 \cdot t}{8}$$

$$S_{yz}(y=0) = \frac{1}{2} t^3 = S_{yz}^{\text{max}}$$

$$G_{xy}^{\text{max}} = \frac{T_{\text{max}} \cdot S_{yz}^{\text{max}}}{t \cdot J_z} = \frac{8000 \cdot t^3 \cdot 3}{2 \cdot t \cdot 2t^4} \leq \tau_{\text{DOP}} \Rightarrow \frac{6000}{t^2} \leq 90$$

$$t \geq 8,165 \text{ mm}$$

$$J_z = \frac{b a^3}{12} = \frac{t (2t)^3}{12} = \frac{2t^4}{3}$$

dimenzioniranje na največjo upogibno napetost (pod silo F). Strizna napetost je tam enaka nič!

$$\sigma_{xx}^{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{J_z} y_{\text{max}} \leq \sigma_{\text{DOP}}$$

$$\frac{4 \cdot 1000^2 \cdot 3}{2 t^4} \cdot t \leq 160$$

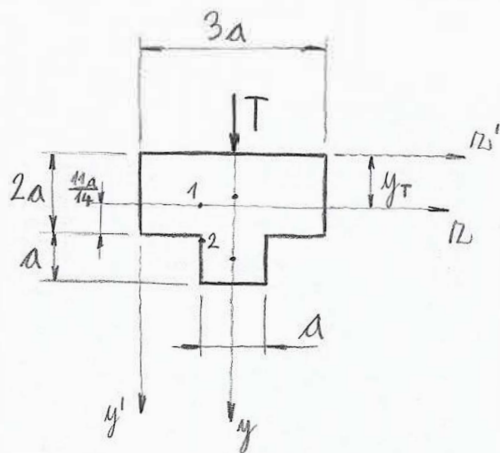
$$\frac{6000000}{t^3} \leq 160$$

$$t \geq \sqrt[3]{\frac{6000000}{160}}$$

$$t \geq 33,472 \text{ mm}$$

⇓
upogib je veliko bolj nevaren kot strig!

Dimenzionirajte navisani prerez!



$$T = 40 \text{ kN}$$

$$\tau_{\text{DOP}} = 85 \text{ MPa}$$

$$a = ?$$

$$y_T = \frac{a \cdot 3a \cdot 2a + 2,5a \cdot a \cdot a}{3a \cdot 2a + a \cdot a} = \frac{17}{14} a \approx 1,2143 \cdot a$$

$$J_z = \frac{3a \cdot (2a)^3}{12} + \left(\frac{17}{14}a - a\right)^2 \cdot 6a^2 + \frac{a^4}{12} + \left(2,5a - \frac{17}{14}a\right)^2 \cdot a^2$$

$$J_z = \frac{337}{84} a^4 \approx 4,0119 \cdot a^4$$

dimenzioniramo v dveh točkah: ① in ②:

$$\sigma_{xy} = \frac{T \cdot S_{yx}}{b \cdot J_z} \leq \tau_{\text{DOP}}$$

točka ①: $b = 3a$

točka ②: $b = a$

$$S_{yx2} = \left(\frac{11}{14}a + \frac{a}{2}\right) \cdot a^2 = \frac{9}{7} a^3 \approx 1,2857 \cdot a^3$$

$$\frac{40000 \cdot 9 \cdot a^3 \cdot 84}{7 \cdot a \cdot 337 \cdot a^4} \leq 85 \Rightarrow \frac{12818,99}{a^2} \leq 85$$

$$\underline{\underline{a \geq 12,2805 \text{ mm}}}$$

Torej je kritična točka ②.