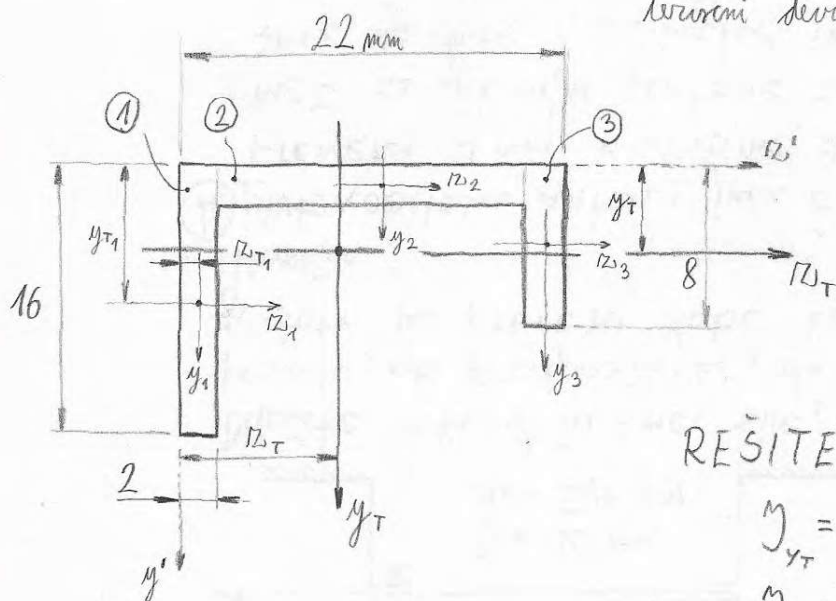


Za navedeni nesimetrični U prevez izračunajte težišna vztrajnostna momenta J_{y_T} , J_{z_T} ter težišni deviacijski moment $J_{y_T z_T}$.



Izračun geometrijskih karakteristik
prereza nosilca iz 10. vaje

REŠITEV:

$$J_{y_T} = 5483,238 \text{ mm}^4$$

$$J_{z_T} = 1611,238 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_T z_T} = -1241,904 \text{ mm}^4$$

lik (i)	y_{Ti}	z_{Ti}	A_i	J_{y_i}	J_{z_i}	$J_{y_i z_i}$	$(z_{Ti} - z_T)^2 A_i$	$(y_{Ti} - y_T)^2 A_i$	$(y_{Ti} - y_T)(z_{Ti} - z_T) A_i$
1	8	1	32	$\frac{32}{3}$	$\frac{2048}{3}$	0	2097,052	452,862	-974,512
2	1	11	36	972	12	0	130,612	377,469	-222,041
3	4	21	16	$\frac{16}{3}$	$\frac{256}{3}$	0	2267,574	0,907	-45,351
		4,2381	9,0952						

$$y_T = \frac{8 \cdot 32 + 1 \cdot 36 + 4 \cdot 16}{32 + 36 + 16} = \frac{89}{21} \text{ mm} \approx 4,2381 \text{ mm}$$

$$z_T = \frac{1 \cdot 32 + 11 \cdot 36 + 21 \cdot 16}{32 + 36 + 16} = \frac{191}{21} \text{ mm} \approx 9,0952 \text{ mm}$$

$$J_{y_1} = \frac{16 \cdot 2^3}{12} = \frac{32}{3} \text{ mm}^4$$

$$J_{z_1} = \frac{2 \cdot 16^3}{12} = \frac{2048}{3} \text{ mm}^4$$

$$J_{y_2} = \frac{2 \cdot 18^3}{12} = 972 \text{ mm}^4$$

$$J_{z_2} = \frac{18 \cdot 2^3}{12} = 12 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_3} = \frac{8 \cdot 2^3}{12} = \frac{16}{3} \text{ mm}^4$$

$$J_{z_3} = \frac{2 \cdot 8^3}{12} = \frac{256}{3} \text{ mm}^4$$

$$(z_{T1} - z_T)^2 A_1 = (1 - \frac{191}{21})^2 \cdot 32 = 2097,052 \text{ mm}^4$$

$$(z_{T2} - z_T)^2 A_2 = (11 - \frac{191}{21})^2 \cdot 36 = 130,612 \text{ mm}^4$$

$$(z_{T3} - z_T)^2 A_3 = (21 - \frac{191}{21})^2 \cdot 16 = 2267,574 \text{ mm}^4$$

itd.

$$J_{y_T} = \frac{32}{3} + 972 + \frac{16}{3} + 2097,052 + 130,612 + 2267,574 = 5483,238 \text{ mm}^4$$

$$J_{z_T} = \frac{2048}{3} + 12 + \frac{256}{3} + 452,862 + 377,469 + 0,907 = 1611,238 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_T z_T} = 0 + 0 + 0 - 974,512 - 222,041 - 45,351 = -1241,904 \text{ mm}^4$$

Dodatna naloga 10

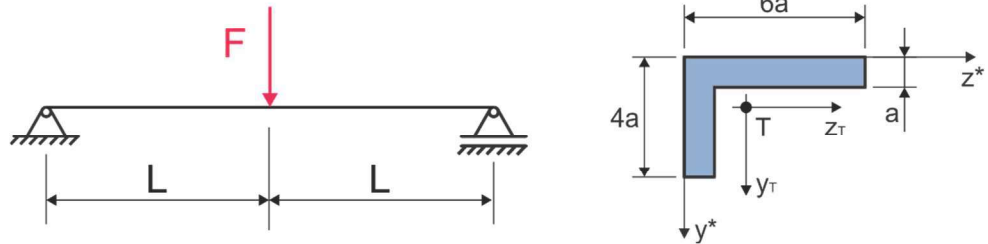
1.) Dimenzionirajte narisani nosilec. Napetosti zaradi notranjih osnih in strižnih sil zanemarite.

$$F = 8 \text{ kN}$$

$$L = 2 \text{ m}$$

$$\sigma_{\text{DOP}} = 160 \text{ MPa}$$

$$a = ?$$



Rešitev:

- izračunamo vrednost maksimalnega notranjega upogibnega momenta:

$$M_{\text{MAX}} = 8 \text{ kNm}$$

- izračunamo položaj težišča (v koordinatnem sistemu (y^*, z^*)) in vrednost vztrajnostnih momentov prereza in deviacijskega momenta prereza v koordinatnem sistemu (y_T, z_T) :

$$y_T = \frac{7}{6}a, \quad z_T = \frac{13}{6}a$$

$$I_{y_T} = 30,75a^4, \quad I_{z_T} = 10,75a^4, \quad I_{y_T z_T} = -10a^4$$

- notranji upogibni moment ne leži na glavni vztrajnostni osi prereza ($I_{y_T z_T} \neq 0$), tako da imamo poševni upogib. V naslednjem koraku izračunamo vrednost glavnih vztrajnostnih momentov prereza, postavimo koordinatni sistem glavnih vztrajnostnih osi, izračunamo komponenti momenta okrog prve in druge glavne vztrajnostne osi in določimo položaj nevtralne osi:

$$I_{1,2} = 20,75a^4 \pm 14,142a^4$$

$$I_1 = 34,892a^4, \quad I_2 = 6,608a^4$$

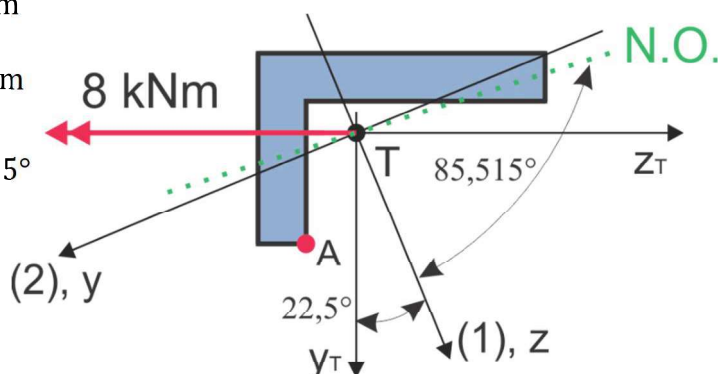
$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{y_T z_T}}{I_{z_T} - I_{y_T}} = 1 \Rightarrow \alpha = 22,5^\circ, \quad \alpha = 112,5^\circ, \dots$$

$$I_u(\varphi = 22,5^\circ) = 34,892a^4 = I_1 \Rightarrow \alpha_1 = 22,5^\circ, \quad \alpha_2 = 112,5^\circ$$

$$M_1 = +3,061 \text{ kNm} = +(8 \sin 22,5^\circ) \text{ kNm}$$

$$M_2 = -7,391 \text{ kNm} = -(8 \cos 22,5^\circ) \text{ kNm}$$

$$\tan \beta = \frac{I_1 M_2}{I_2 M_1} = -12,75 \Rightarrow \beta = -85,515^\circ$$



- izkaže se, da je od nevtralne osi najbolj oddaljena točka A (slika ni popolnoma pravilno narisana). Za izračun koordinat točke A v koordinatnem sistemu glavnih vztrajnostnih osi potrebujemo koordinati točke v koordinatnem sistemu (y_T, z_T) in kot φ , za katerega je koordinatni sistem (y, z) zasukan glede na koordinatni sistem (y_T, z_T) :

$$y_{TA} = \frac{17}{6}a, \quad z_{TA} = -\frac{7}{6}a, \quad \varphi = -67,5^\circ$$

...

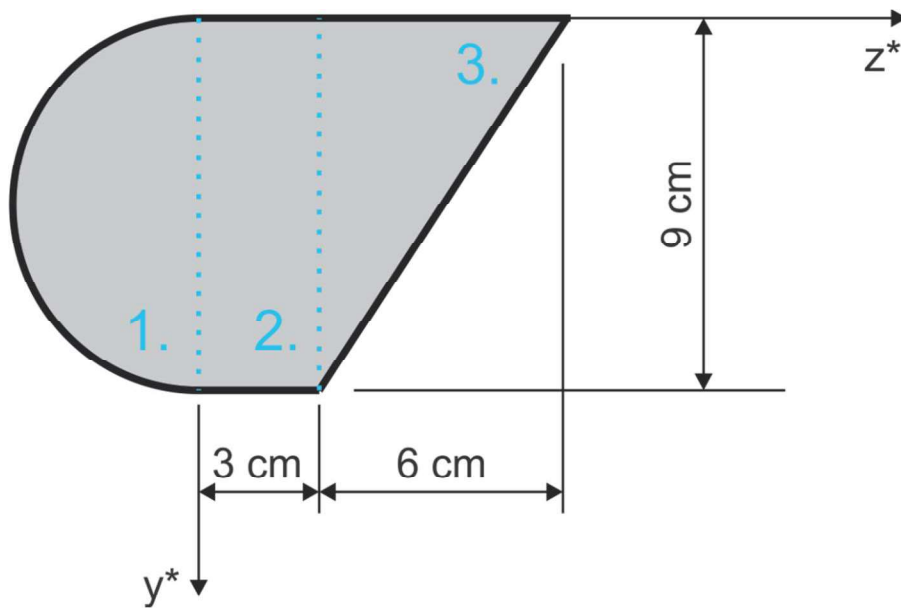
$$y_A = 2,162a, \quad z_{TA} = 2,171a$$

- maksimalna napetost v prerezu (t.j. v točki A) mora biti nižja od dopustne vrednosti:

$$\sigma_{xx,A} = \dots = 2,61792 \frac{1000^2}{a^3} \text{ MPa}$$

$$|\sigma_{xx,A}| \leq \sigma_{DOP} \quad \Rightarrow \quad a \geq 25,39 \text{ mm} \quad (a = 25,4 \text{ mm})$$

2.) Za prerez na spodnji sliki izračunajte težiščna vztrajnostna momenta (I_y, I_z), težiščni deviacijski moment (I_{yz}), glavna vztrajnostna momenta prereza in položaj glavnih vztrajnostnih osi.



Rezultati:

Lik (i)	y_{Ti} [cm]	z_{Ti} [cm]	A_i [cm ²]	I_{yi} [cm ⁴]	I_{zi} [cm ⁴]	I_{yizi} [cm ⁴]
1	4,5	-1,91	31,81	45,01	161,03	0
2	4,5	1,5	27	20,25	182,25	0
3	3	5	27	54	121,5	-40,5

Lik (i)	$(z_{Ti} - z_T)^2 A_i$ [cm ⁴]	$(y_{Ti} - y_T)^2 A_i$ [cm ⁴]	$(z_{Ti} - z_T)(y_{Ti} - y_T) A_i$ [cm ⁴]
1	335,99	7,03	-48,59
2	0,69	5,96	2,03
3	361,68	28,64	-101,78

$$y_T = 4,03 \text{ cm}, \quad z_T = 1,34 \text{ cm}$$

$$I_y = 817,62 \text{ cm}^4, \quad I_z = 506,41 \text{ cm}^4, \quad I_{yz} = -188,84 \text{ cm}^4$$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = 662,015 \text{ cm}^4 \pm 244,69 \text{ cm}^4$$

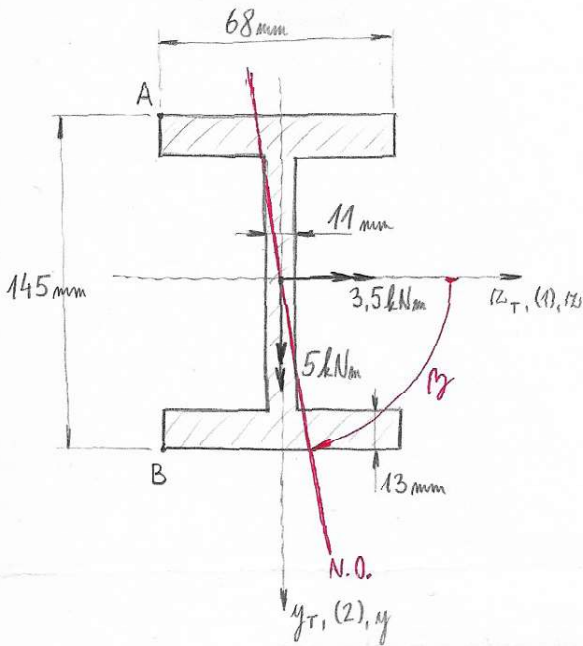
$$I_1 = 906,705 \text{ cm}^4, \quad I_2 = 417,325 \text{ cm}^4$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} = 1,2136 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 25,26^\circ, \quad \alpha = 115,26^\circ, \dots$$

$$I_u(\varphi = 25,26^\circ) = 906,75 \text{ cm}^4 = I_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 25,26^\circ, \quad \alpha_2 = 115,26^\circ$$

Določite lego nevtralne osi (navarite jo) ter upojilno napetost v točkah A in B.

Rešitev domače naloge 2017/2018-DN11



$$J_{y_T} = \frac{13 \cdot 68^3}{12} \cdot 2 + \frac{119 \cdot 11^3}{12} = 694468,42 \text{ mm}^4$$

$$J_{z_T} = \frac{68 \cdot 145^3}{12} - \frac{28,5 \cdot 119^3}{12} \cdot 2 = 9271036,42 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_T z_T} = 0$$

$$J_1 = J_{z_T} = 9271036,42 \text{ mm}^4$$

$$J_2 = J_{y_T} = 694468,42 \text{ mm}^4$$

$$M_1 = -3,5 \text{ kNm} = -3,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M_2 = -5 \text{ kNm} = -5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

lega nevtralne osi: $\text{tg } \alpha = \frac{J_1 M_2}{J_2 M_1} = 19,0712$

$$\alpha = 86,998^\circ - \text{kot med } z \text{ in N.O.}$$

koordinate točk A in B v koordinatnem sistemu glavnih vztrajnostnih osi:

koordinatni sistem glavnih vztrajnostnih osi:

$$y_A = -72,5 \text{ mm}$$

$$y_B = 72,5 \text{ mm}$$

$$z_A = -34 \text{ mm}$$

$$z_B = -34 \text{ mm}$$

$$\sigma_{xx_A} = \frac{M_1}{J_1} y_A - \frac{M_2}{J_2} z_A = \frac{-3,5 \cdot 10^6}{9271036,42} \cdot (-72,5) - \frac{-5 \cdot 10^6}{694468,42} \cdot (-34) = -217,42 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xx_B} = \frac{M_1}{J_1} y_B - \frac{M_2}{J_2} z_B = \frac{-3,5 \cdot 10^6}{9271036,42} \cdot 72,5 - \frac{-5 \cdot 10^6}{694468,42} \cdot (-34) = -272,16 \text{ MPa}$$