



Dinamika

Laboratorijske vaje

Dr. Janko Slavič

20. junij 2007

1 Določitev aksialnega masnega vztrajnostnega momenta ojnice	2
2 Uravnoveženje rotorja	6
3 Frekvenčni odziv centrifugalno vzbujanega sistema	8
Literatura	11

Gradivo podaja nujne izraze za sledenje laboratorijskim vajam, pri čemer se predpostavlja znanje s predavanj in vaj.

Študent:		
Lab. vaja	Datum	Podpis asistenta
Prva		
Druga		
Tretja		

Zadnja različica se nahaja na: <http://lab.fs.uni-lj.si/ladisk/data/pdf/LaboratorijskeVajeDin.pdf>

1 Določitev aksialnega masnega vztrajnostnega momenta ojnice

1.1 Namen vaje

V gibalnih enačbah dinamike togih teles se pojavljajo veličine, ki so odvisne od mase in geometrijske oblike telesa. Imenujemo jih masni vztrajnostni momenti. Za posamezna, geometrijsko pravilno oblikovana in homogena telesa so te veličine lahko izračunljive po definicijskih enačbah. V tehniški praksi pa imamo pogosto opravka s strojnimi elementi, ki nimajo geometrijske podobnosti s kvadrom, valjem, kroglo, ipd., ampak so zapletenih oblik, neprimernih za enostaven matematičen popis geometrije. V takem primeru je dosti lažje in ponavadi tudi natančneje posredno izmeriti aksialni masni vztrajnostni moment strojnega elementa. Temu pristopu je namenjena ta vaja.

1.2 Definicija naloge

Določite aksialni masni vztrajnostni moment ojnice, prikazane na sliki 1. Uporabite teorijo fizikalnega nihala.



Slika 1: Ojnica.

1.3 Izvedba vaje

1.3.1 Teorija fizikalnega nihala

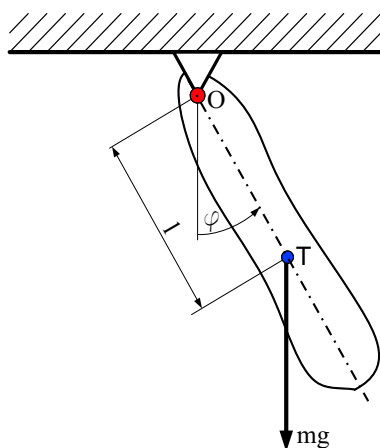
Model fizikalnega nihala v vertikalni ravnini (slika 2) predstavlja togo telo, obešeno v neki točki. Fizikalno nihalo mase m ima težišče v točki T, ki je za l oddaljena od vrtilišča O. Sistem ima eno prostostno stopnjo in je konservativen. Za popis lege nihala izberemo koordinato φ , ki popisuje edino prostostno stopnjo. Gibalno enačbo fizikalnega nihala izpeljemo z uporabo II. Newtonovega zakona za rotacijo okoli nepomične osi O:

$$\sum M_O = J_O \ddot{\varphi}. \quad (1)$$

Glede na sliko 2 sledi:

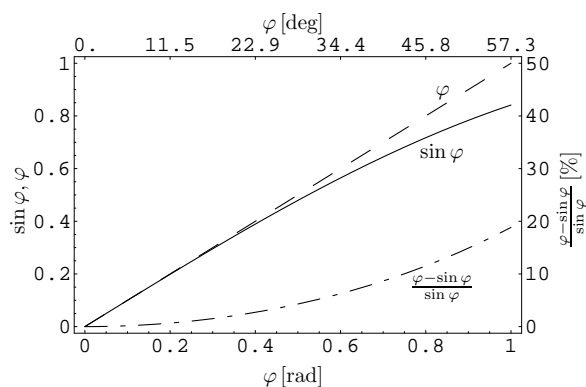
$$- m g l \sin \varphi = J_O \ddot{\varphi}. \quad (2)$$

Funkcijo $\sin(\varphi)$ lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli $\varphi_0 = 0$: $\sin \varphi = \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} \dots$. V kolikor predpostavimo majhne kote, se izkaže, da lahko člene druge in višje stopnje zanemarimo; napako, ki jo



Slika 2: Model fizikalnega nihala.

s tem naredimo, nam prikazuje slika 3. Pri kotu 5° je tako napaka, če namesto $\sin \varphi$ uporabimo φ samo 0,13%, pri 10° pa 0,51% in nato hitro narašča. Kot majhne kote tako razumemo kote do nekaj kotnih stopinj (npr. 5°).



Slika 3: Napaka pri majhnih kotih.

Ob upoštevanju predpostavke majhnih kotov izraz (2) preoblikujemo v:

$$J_O \ddot{\varphi} + m g l \varphi = 0, \quad (3)$$

oziroma:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (4)$$

kjer z ω_0 označimo lastno krožno frekvenco fizikalnega nihala. Lastna krožna frekvenca je lastnost sistema in je za fizikalno nihalo podana z enačbo:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m g l}{J_O}} = \frac{2\pi}{T_0}, \quad (5)$$

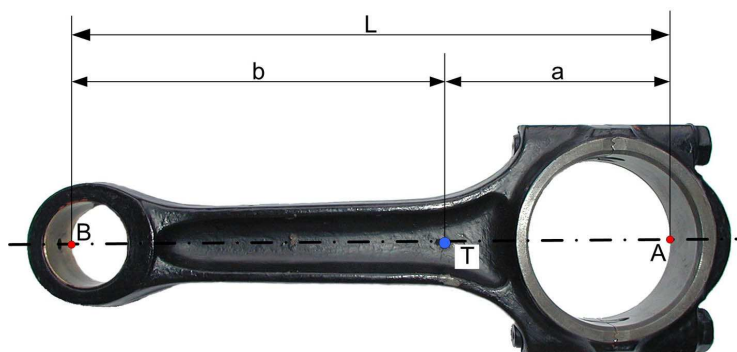
kjer je T_0 nihajni čas lastnega nedušenega nihanja fizikalnega nihala.

1.3.2 Masni vztrajnostni moment ojnice glede na težišče

Naloga zahteva, da izmerimo masni vztrajnostni moment ojnice glede na težišče. Glede na izraz (5) bi lahko izmerili masni vztrajnostni moment glede na vrtilišče O.

V nadaljevanju bomo pokazali, da lahko, če izmerimo masni vztrajnostni moment okoli dveh različnih vrtilišč in vemo kakšna je razdalja med njima, določimo tudi masni vztrajnostni moment glede na težišče.

Če ojnico na sliki 4 zanimamo okoli točke A in nato še okoli točke B kot fizikalno nihalo, potem lahko izmerimo nihajna časa lastnega nedušenega nihanja ojnice: T_{0A} in T_{0B} . Glede na izraz (5) lahko nato izračunamo masna vztrajnostna momenta glede na os A oziroma B: J_A, J_B . Ker pa nas dejansko zanima



Slika 4: Naris ojnice.

masni vztrajnostni moment glede na težišče J_T , lahko z uporabo Steinerjevega stavka zapišemo:

$$\omega_{0A} = \frac{2\pi}{T_{0A}} = \sqrt{\frac{m g a}{J_A}} = \sqrt{\frac{m g a}{J_T + m a^2}}, \quad (6)$$

$$\omega_{0B} = \frac{2\pi}{T_{0B}} = \sqrt{\frac{m g b}{J_B}} = \sqrt{\frac{m g (L - a)}{J_T + m (L - a)^2}}, \quad (7)$$

kjer je L izmerjena razdalja med točkama A in B in a neznana razdalja od točke A do težišča T (slika 4).

Imamo torej dve neznanki (J_T, a) in dve enačbi (6,7). Iz izraza (6) izrazimo težiščni vztrajnostni moment ojnice J_T :

$$J_T = \frac{T_{0A}^2}{4\pi^2} m g a - m a^2 \quad (8)$$

in ga vstavimo v izraz (7) ter iz enačbe izrazimo a :

$$a = L \frac{g T_{0B}^2 - 4\pi^2 L}{g (T_{0A}^2 + T_{0B}^2) - 8\pi^2 L}. \quad (9)$$

Da lahko izračunamo masni vztrajnostni moment glede na težišče J_T , moramo izmeriti še maso ojnice m .

1.3.3 Meritve

Masa ojnice

Maso ojnice izmerimo s tehtnico.

Kaj gre lahko narobe?

- Napačno merjenje – položi ojnico na sredino merilne ploščadi.

Razdalja med točkama A in B

Razdaljo L med točkama A in B izmerimo s kljunastim merilom.

Kaj gre lahko narobe?

- Napačen odčitek → ne izvleci merila iz merjenca, vrednost odčitaj v položaju meritve.
- Napačen odčitek → odčitaj merjeno vrednost le s tisto natančnostjo, ki jo nonij omogoča.
- Napačen odčitek → paralaksa, glej pravokotno na nonij.
- Napačen odčitek → odčitani vrednosti dodaj 20mm širine čeljusti.

Nihajni čas

Nihajni čas nihanja ojnice okoli točke A, kot tudi točke B, izmerimo s stoparico. Merimo čas večjega števila nihajev. Tako zmanjšamo (relativno) napako človeškega reakcijskega časa in netočnost pri določitvi skrajne lege nihala. Število merjenih nihajev naj bo med 10 in 30. Meritev nihajnih časov ponovimo 5-krat za primer A in 5-krat za primer B. Meri naj več različnih oseb.

Kaj gre lahko narobe?

- Prevelik začetni odmik (kot) od ravnovesne lege → linearna teorija predpostavlja nihanja z majhnimi ($< 5^\circ$) amplitudami kotov.
- Napačen odčitek → odčitaj merjeno vrednost le s tisto natančnostjo, ki jo stoparica omogoča.
- Napačno število nihajev → ko pritisneš na sprožilec začneš šteti število nihajev z nič.
- Napačno število nihajev → merjenje časa ustaviš, ko nihalo po nekaj nihajih doseže izhodiščno lego.
- Napačen izračun → v izračunih upoštevaj čas enega nihaja.

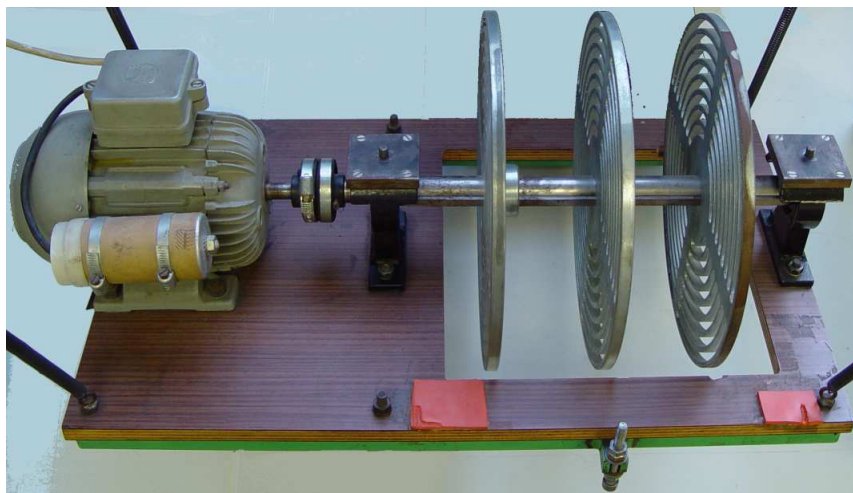
2 Uravnoveženje rotorja

2.1 Opis laboratorijske vaje

V prvem delu laboratorijske vaje je predstavljeno merjenje kvalitete uravnoveženja togega rotorja glede na standard ISO 10816-1, v drugem delu pa so podrobneje predstavljeni principi uravnoveženja togih rotorjev.

2.2 Merjenje kvalitete uravnoveženja

Kvaliteta uravnoveženja rotorja bo določena po standardu ISO 10816-1 na podlagi merjenja hitrosti vibracij na ležajnih mestih. Najprej določite kvaliteto uravnoveženja za rotor na sliki 5, nato pa še za rotor z dodanimi utežmi, s katerimi je rotor neuravnovežen.



Slika 5: Merjenje kvalitete neuravnoveženosti.

2.2.1 Kvaliteta uravnoveženja rotorja

Posledica slabo uravnoveženega rotorja je povečan nivo vibracij, ki jih lahko izmerimo na ležajih. Za določevanje kvalitete uravnoveženja bomo torej izrabili njegovo posledico: velikost nivoja vibracij, katere sprejemljivost določimo glede na standard ISO 10816-1:1995¹. Standard navaja, da je za večino naprav efektivna hitrost v_{rms} primerno merilo za oceno sprejemljivosti nivoja vibracij. To velja za relativno širok razpon hitrosti vrtenja naprav. Same naprave so razdeljene v več razredov:

- Razred I** Majhne naprave (električni motorji moči do 15kW).
- Razred II** Srednje velike naprave moči 15kW do 75kW brez posebnih temeljev ali togo pritrjene naprave do 300kW na posebnih temeljih.
- Razred III** Velike naprave na velikih togih temeljih.
- Razred IV** Velike naprave na relativno mehkih temeljih.

Posamezno napravo iz določenega razreda naprav nato glede na izmerjeni nivo vibracij s pomočjo tabele 1 razvrstimo v eno od štirih obratovalnih področij:

¹ISO 10816-1:1995 Mechanical vibration – Evaluation of machine vibration by measurements on non-rotating parts – Part 1: General guidelines

- Področje A** Večina novih naprav naj bi spadala v to področje.
- Področje B** Naprave v tem področju so ponavadi ustrezne za dolgotrajno obratovanje.
- Področje C** Naprave v tem področju so ponavadi neustrezne za dolgotrajno obratovanje. Časovno omejeno delovanje naprav je dovoljeno.
- Področje D** Oscilacije v tem področju lahko resno poškodujejo napravo.

Tabela 1: Vrednotenje sprejemljivosti nivoja vibracij po standardu ISO 10816-1:1995.

v_{rms} [mm/s]	Razred I	Razred II	Razred III	Razred IV
0,28	A	A	A	A
0,45				
0,71				
1,12	B	B	C	B
1,80				
2,80	C	C	C	C
4,50				
7,10	D	D	D	D
11,2				
18,0				
28,0				
45,0				

2.2.2 Izvedba meritve

Hitrosti v ležajih merimo s pomočjo namenske naprave Vibrobalans (Galeb). Naprava izmeri efektivno ali tudi rms (root-mean-square) hitrost, ki je definirana kot:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt} \quad (10)$$

Za določitev neuravnoveženosti je potrebno izmeriti še hitrost vrtenja, kar je mogoče s pomočjo strobo-skopa.

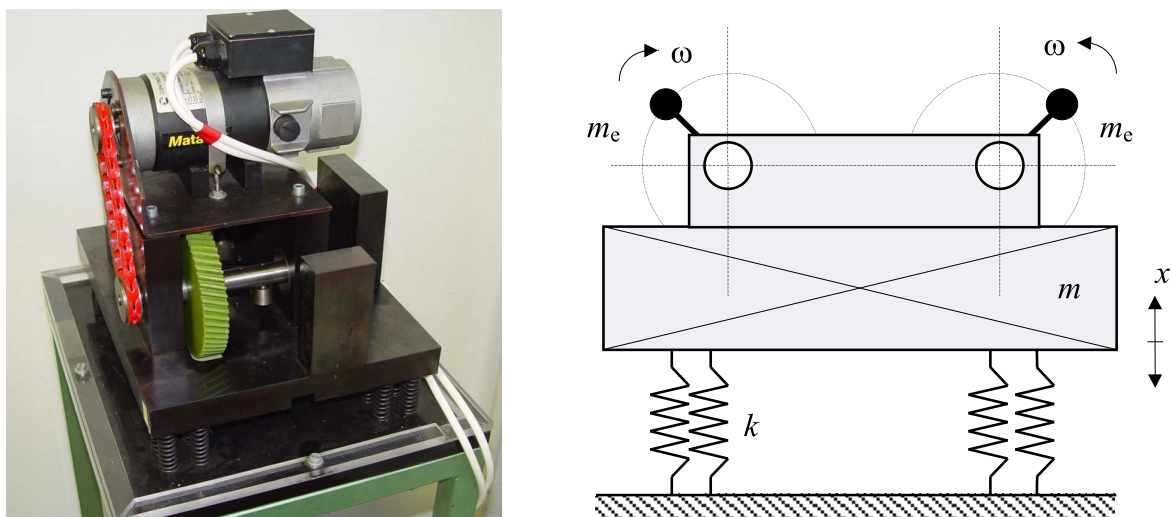
3 Frekvenčni odziv centrifugalno vzbujanega sistema

3.1 Namen vaje

V strojniški praksi je centrifugalno vzbujanje velikokrat izvor vibracij strojev in naprav. V nekaterih primerih namensko dodamo izvor vibracij v sistem, npr. vibracijska sita, dozatorji razsutega materiala, ..., v drugih primerih pa je tak izvor vibracij moteč, npr. neuravnoteženi rotor turbine, ... Z namenom, da bi spoznali fenomen centrifugalnega vzbujanja, se bomo tukaj ukvarjali z analizo osnovnega modela centrifugalnega vzbujanja.

3.2 Definicija naloge

Za sistem na sliki 6 določite razmernik dušenja in lastno dušeno krožno frekvenco. Z meritvami določite frekvenčni odziv sistema zaradi centrifugalnega vzbujanja v ustaljenem stanju. Merjeni frekvenčni odziv primerjajte s teoretičnim. Kot je razvidno iz slike 6, smo predpostavili model z eno prostostno stopnjo.



Slika 6: Centrifugalno vzbujan sistem. Levo: sistem, desno: fizikalni model.

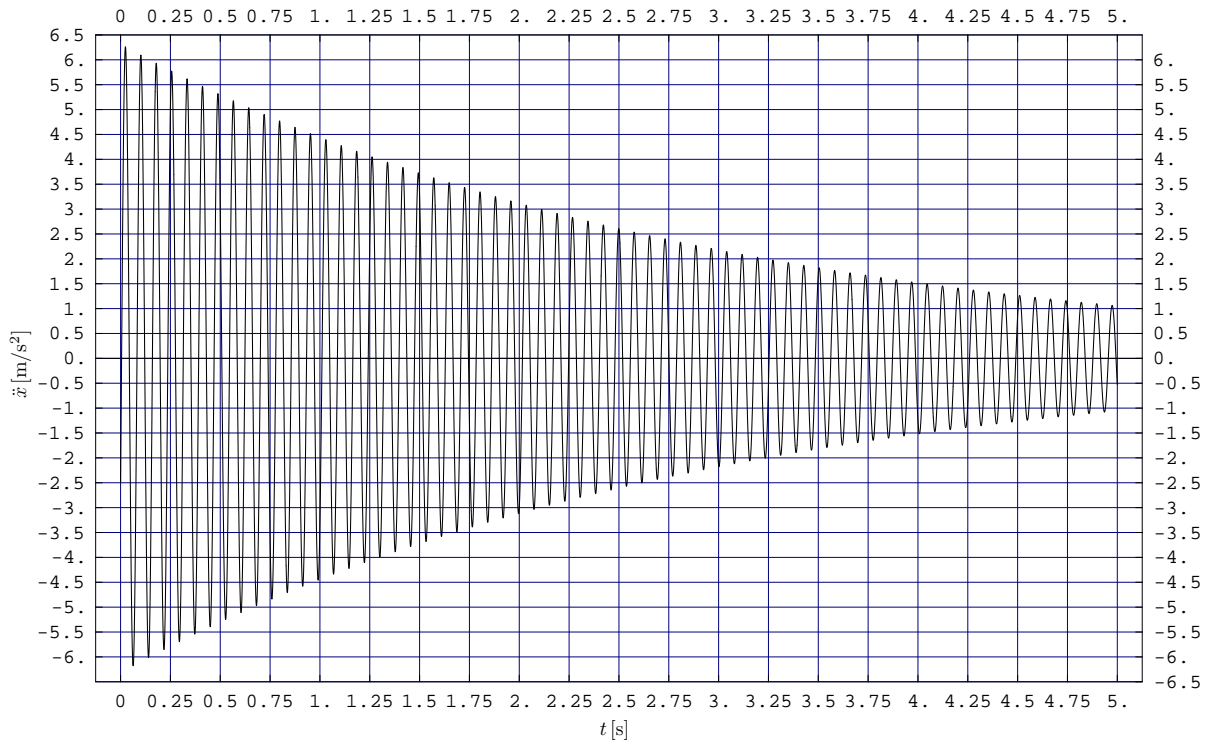
Podatki:

$$\begin{aligned} m &= 36,7 \text{ kg} \\ m_e &= 0,03 \text{ kg} \\ e &= 30 \text{ mm} \\ k &= 243 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

3.3 Izvedba vaje

3.3.1 Lastno dušeno nihanje

Iz slike 7, ki prikazuje lasten dušen odziv nihala na sliki 6, lahko določimo razmernik dušenja δ in lastno krožno frekvenco dušenega nihanja ω_{0d} .



Slika 7: Lasten dušen odziv sistema.

Poglejmo, kako pridemo do iskanih parametrov: gre za preprost sistem masa–vzmet–dušilka, za katerega lahko izpeljemo gibalno enačbo:

$$m \ddot{x} + d \dot{x} + k x = 0. \quad (11)$$

Gibalno enačbo normiramo (delimo z maso m) in zapišemo v splošni obliki:

$$\ddot{x} + 2\delta\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (12)$$

kjer je δ razmernik dušenja, ω_0 pa lastna krožna frekvenca nedušenega nihanja. Glede na gibalno enačbo (12), pričakujemo odziv oblike:

$$x(t) = e^{-\delta\omega_0 t} [A \cos(\omega_{0d} t) + B \sin(\omega_{0d} t)], \quad (13)$$

kjer je $\omega_{0d} = \omega_0 \sqrt{1 - \delta^2}$ lastna krožna frekvenca dušenega nihanja in A in B konstanti odvisni od začetnih pogojev.

Pri lahko dušenih sistemih $\delta \ll 1$ se izkaže, da se lastna nedušena ω_0 in lastna dušena krožna frekvenca ω_{0d} relativno malo razlikujeta. Če torej uporabimo poenostavitev $\omega_0 \approx \omega_{0d}$, lahko s pomočjo izraza (13), slike 7 ter malo sklepanja določimo razmernik dušenja δ in lastno krožno frekvenco dušenega nihanja ω_{0d} .

3.3.2 Frekvenčni odziv sistema

Za centrifugalno vzbujanje sistema na sliki 6 je ob predpostavki $m_e \ll m$ gibalna enačba:

$$(m + m_e) \ddot{x} + d \dot{x} + k x = m_e e \omega^2 \sin(\omega t). \quad (14)$$

Izraz (14) normiramo in zapišemo v splošni obliki:

$$\ddot{x} + 2\delta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f_0 \sin(\omega t), \quad (15)$$

kjer je $f_0 = \frac{m_e e \omega^2}{m_e + m}$. Za tako vzbujan sistem pričakujemo v *ustaljenem stanju* odziv:

$$x(t) = X \sin(\omega t - \phi), \quad (16)$$

kjer je amplituda nihanja v ustaljenem stanju:

$$X = X_0 \beta \quad (17)$$

in

$$X_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2} \quad (18)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\delta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (19)$$

Izraza (17) in (18) preoblikujemo v t.i. izraz normiranih amplitud v odvisnosti od vzbujevalne frekvence:

$$\gamma = \frac{X}{\frac{m_e e}{m_e + m}} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \beta. \quad (20)$$

Tako smo prišli do frekvenčnega odziva sistema. Frekvenčni odziv glede na meritve dobimo tako, da pomerimo amplitude pomikov X pri določeni frekvenci vzbujanja ω in uporabimo prvi del izraza (20). Frekvenčni odziv glede na meritve primerjamo s teoretičnim frekvenčnim odzivom, ki ga dobimo tako, da za določeno vzbujevalno krožno frekvenco ω izračunamo drugi del izraza (20).

3.3.3 Meritve

Merjenje amplitude pomikov vsiljenega nihanja

Pri vzbujanju s centrifugalno silo vzbujevalne krožne frekvence ω želimo pomeriti amplitudo nihanja. Ker pa s pospeškomerom izmerimo pospeške, moramo uporabiti povezavo med amplitudo pospeška \ddot{X} in amplitudo pomika X za sinusni signal:

$$\ddot{X} = -\omega^2 X. \quad (21)$$

Meritve izvedemo na naslednji način:

1. nastavimo željeno kotno hitrost elektromotorja v ob/min,
2. počakamo, da se tranzient izniha,
3. na osciloskopu zamrznemo sliko in odčitamo dvojno amplitudo nihanja,
4. vrnemo se na prvo točko.

Literatura

- [1] KUHELJ A. ML.: *Mehanika, Dinamika*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1998
- [2] STROPNIK J.: *Kinetika za višješolski študij*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1995
- [3] MURŠIČ M.: *Osnove tehniške mehanike 3, Dinamika*, Akademsko založba, Ljubljana, 1991
- [4] STROPNIK J.: *Mehanika- Laboratorijske vaje*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1985