

UNIVERZA V LJUBLJANI

FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Naslov

Podnaslov

Ime Priimek

Mentor: Ime Priimek

Ljubljana, 20. marec 2013

Kazalo

Seznam uporabljenih simbolov	2
1 Uvod	3
1.1 Definicija naloge	3
2 Rešavanje naloge	4
3 Zaključek	6
Literatura	6
A Dodatek	8

Seznam uporabljenih simbolov

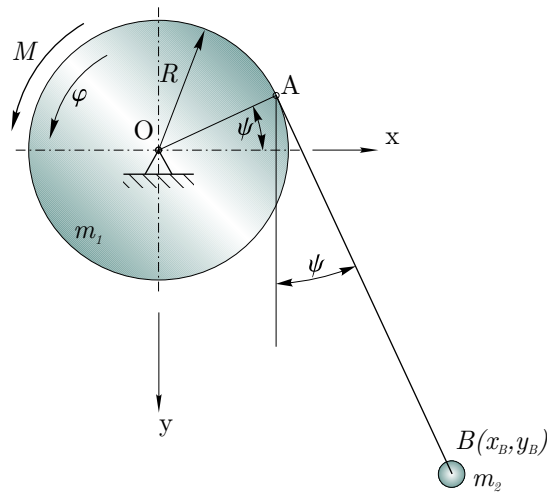
Oznaka	Pomen
m_1	masa homogenega valja, enota: kg
n	število homogenih valjev, enota: kg
ψ	posplošena koordinata, enota: rad

1 Uvod

To je uvod v seminar. Definicija je podana v 1.1. Vse znanje smo povzeli po [1]. V dodatku so podane dodatne izpeljave.

1.1 Definicija naloge

Na homogen valj mase m_1 in polmera R je navita vrv brez teže, na katero je pripeto breme B mase m_2 . Na valj deluje moment M , zaradi česar se breme B dviguje in niha okrog horizontalne osi. Določite diferencialno enačbo gibanja, če je dolžina vrvi na začetku l_0 (slika 1).



Slika 1: Skica naloge.

2 Rešavanje naloge

Nalogo bomo rešimo z *Lagrange*ovimi enačbami 2. reda; dinamično ravnotežje sistema je opisano z enačbo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad \text{za vse } j. \quad (1)$$

Kjer je T *kinetična energija sistema*, Q pa *posplošena sila*. Sistem ima $P=2$ prostostnih stopenj in $N=2$ nevezanih posplošenih koordinat:

$$q_1 = \varphi \quad (2)$$

$$q_2 = \psi \quad (3)$$

Kinetična energija sistema je:

$$T = \frac{1}{2} J_O \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_B^2, \quad (4)$$

kjer je J_O *masni vztrajnostni moment* valja okoli vrtišča O in v_B *hitrost translacije* masne točke B.

$$J_O = \frac{m_1 R^2}{2} \quad (5)$$

Da določimo hitrost točke B določimo najprej njeno lego:

$$x_B = (l_0 - R\varphi + R\psi) \sin(\psi) + R \cos(\psi) \quad (6)$$

$$y_B = (l_0 - R\varphi + R\psi) \cos(\psi) - R \sin(\psi) \quad (7)$$

Z odvajanjem krajevnih koordinat dobimo hitrosti:

$$\dot{x}_B = +(l_0 - R\varphi + R\psi) \dot{\psi} \cos(\psi) - R \dot{\varphi} \sin(\psi) \quad (8)$$

$$\dot{y}_B = -(l_0 - R\varphi + R\psi) \dot{\psi} \sin(\psi) - R \dot{\varphi} \cos(\psi) \quad (9)$$

Sledi:

$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 = (l_0 - R\varphi + R\psi)^2 \dot{\psi}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \quad (10)$$

Sedaj vstavimo enačbi (5) in (10) v enačbo (4) in izpeljemo

$$T = \frac{1}{4} (m_1 + 2m_2) R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_0 - R\varphi + R\psi)^2 \dot{\psi}^2 \quad (11)$$

Kinetično energijo sedaj parcialno odvajamo kakor narekuje ravnotežna enačba (1), najprej za posplošeno koordinato φ :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} (m_1 + 2m_2) R^2 \dot{\varphi} \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} (m_1 + 2m_2) R^2 \ddot{\varphi} \quad (13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 R (l_0 - R\varphi + R\psi) \dot{\psi}^2 \quad (14)$$

$$(15)$$

Podobno izpeljemo za posplošeno koordinato ψ :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = m_2 (l_0 - R\varphi + R\psi)^2 \dot{\psi} \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = m_2 (l_0 - R\varphi + R\psi)^2 \ddot{\psi} + 2 m_2 R (l_0 - R\varphi + R\psi) (\dot{\psi} - \dot{\varphi}) \dot{\psi} \quad (17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = m_2 R (l_0 - R\varphi + R\psi) \dot{\psi}^2 \quad (18)$$

$$(19)$$

Glede na ravnotežno enačbo (1) moramo določiti še posplošeno silo, ki jo izpeljemo iz izraza za *virtualno delo*:

$$\delta W = Q_\varphi \delta\varphi + Q_\psi \delta\psi = M \delta\varphi m_2 g \delta y_B, \quad (20)$$

kjer variacijo y_B moramo izračunati:

$$\delta y_B = \frac{\partial y_B}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial y_B}{\partial \psi} \delta\psi = -R \cos(\psi) \delta\psi - (l_0 - R\varphi + R\psi) \sin(\psi) \delta\psi \quad (21)$$

Za virtualno delo torej izpeljemo izraz:

$$\delta W = (M - m_2 g R \cos(\psi)) \delta\varphi + (-m_2 g (l_0 - R\varphi + R\psi) \sin(\psi)) \delta\psi \quad (22)$$

Sledi, da sta posplošeni sili:

$$Q_\varphi = M - m_2 g R \cos(\psi) \quad (23)$$

$$Q_\psi = -m_2 g (l_0 - R\varphi + R\psi) \sin(\psi) \quad (24)$$

Èe sedaj enačbo za dinamično ravnotežje (1) zapišemo za vsako posplošeno koordinato posebej:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = Q_\varphi \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \psi_j} = Q_\psi \quad (26)$$

Z vstavljanjem zgoraj izpeljanih izrazov za kinetično energijo in posplošeno silo v enačbi (25) in (26) dobimo sistem dveh diferencialnih enačb gibanja:

$$(l_0 - R\varphi + R\psi) \ddot{\psi} + R(\dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}) = -g \sin(\psi) \quad (27)$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + 2m_2) R \ddot{\varphi} + m_2 (l_0 - R\varphi + R\psi) \dot{\psi}^2 = M - m_2 R g \cos(\psi) \quad (28)$$

3 Zaključek

To je zaključek seminarja.

Literatura

- [1] A. ml. Kuhelj. *Mehanika – Dinamika*. Fakulteta za strojništvo, 1998.

A Dodatek

To so dodatne izpeljave.

$$y = x^2 \tag{29}$$