# 1 Osnove statistike in verjetnosti

Da bi določili zanesljivost nekega izdelka moramo poznati podatke o lastnostih posameznih komponent iz katerih je izdelek sestavljen. Vsaka od komponent izdelka pripada neki populaciji (Populacija je množica objektov pri kateri nas zanima neka lastnost), katere lastnosti morajo biti poznane. Navadno je opazovana populacija prevelika za določitev vseh parametrov, ki so potrebni v raziskavi, zato obnašanje populacije ovrednotimo glede na obnašanje vzorca, ki ga dobimo iz populacije. Statistični vzorec je namreč podmnožica populacije, na podlagi katerega dobimo oceno parametrov pri delnem opazovanju ali vzorčenju. Uspešno vzorčenje temelji na predpostavki, da je izbrani del populacije reprezentativen, torej da je možno iz lastnosti članov vzorca sklepati oz. ekstrapolirati lastnosti celotne populacije. Vzorci so lahko naključni ali nenaključni. Slučajni oz. naključni vzorec je tisti, pri katerem je verjetnost, da bo član populacije izbran v vzorec, enaka kot pri vseh drugih članih populacije. Pomembna je tudi velikost vzorca; v splošnem omogoča večji vzorec natančnejšo oceno nekega parametra.

Parametra za ovrednotenje osnovnih statističnih lastnosti objektov v vzorcu sta naslednja:

- vzorčna srednja vrednost

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

- in empirična varianca, ki predstavlja mero raztrosa okoli srednje vrednosti

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \tag{2}$$

Za statistični vzorec moramo izbrati tudi ustrezno porazdelitveno funkcijo in oceniti njene parametre, ker bomo le tako lahko sklepali o zanesljivosti celotne populacije.

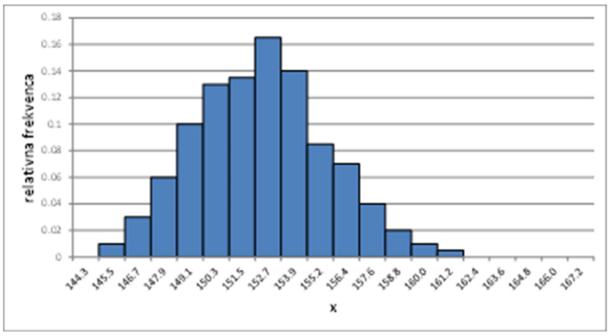
## 1.1 Relativna frekvenca in gostota porazdelitve verjetnosti

Nek proces se lahko opiše tako, da se shrani vrednosti značilne spremenljivke, ki ta proces opisuje. V primeru zanesljivosti je ta spremenljivka navadno čas do nastanka okvare. V primeru naključnega procesa, se vrednost spremenljivke naključno spreminja, zato takšno spremenljivko imenujemo naključna spremenljivka. Naključno spremenljivko najlažje opišemo s pomočjo histograma (Sl.1), ki prostor, ki predstavlja zalogo vrednosti naključne spremenljivke razdeli na določeno število intervalov in nato spremlja pogostnost realizacije vrednosti naključne spremenljivke v posameznem intervalu oz. z drugimi besedami, kolikokrat se izmerjena vrednost naključne spremenljivke nahaja znotraj posameznega intervala.

Relativna frekvenca predstavlja relativni delež realizacij naključne spremenljivke v $i$-tem intervalu. Če je $n$ razsežnost vzorca in $n_i$ število realizacij naključne spremenljivke v $i$-tem intervalu, tedaj se relativna frekvenca za posamezne intervale izračuna z enačbo:

$$f_i = \frac{n_i}{n}; \quad 0 \leq p_i \leq 1 \tag{3}$$

Z drugimi besedami, relativna frekvenca predstavlja verjetnost $p_i$ realizacije naključne spremenljivke $x_j$ v $i$-tem intervalu. Če razsežnost vzorca limitira v celotno populacijo in




**Slika 1.** Histogram relativnih frekvenc.

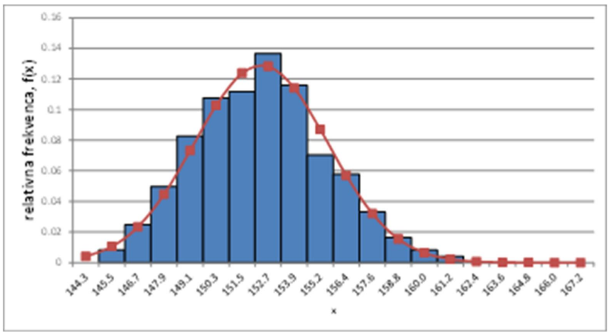
če širine posameznih intervalov limitirajo proti nič, potem relativna frekvenca preide v funkcijo gostote porazdelitve verjetnosti, ki je definirana z enačbo:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_j \to 0}} f_i = f(x) \tag{4}$$

Gostota porazdelitve verjetnosti je zvezna funkcija in je mera verjetnosti realizacije določene vrednosti zvezne naključne spremenljivke $X$.

V kolikor želimo primerjati vrednosti relativnih frekvenc in gostote porazdelitve verjetnosti na istem diagramu (Sl.2) moramo izračunati normirano relativno frekvenco oz. empirično gostoto, ki predstavlja relativno frekvenco na enoto širine uporabljenega intervala v histogramu. Normirano relativno frekvenco se izračuna po enačbi:

$$f_i^* = \frac{n_i}{n \cdot \Delta x} \tag{5}$$




**Slika 2.** Primerjava normirane relativne frekvence in gostote porazdelitve verjetnosti.

## 1.2 Kumulativna porazdelitvena funkcija

Kumulativna porazdelitvena funkcija predstavlja verjetnost realizacije vrednosti naključne spremenljivke, ki je manjša od določene vrednosti $x$. Definirana je z enačbo:

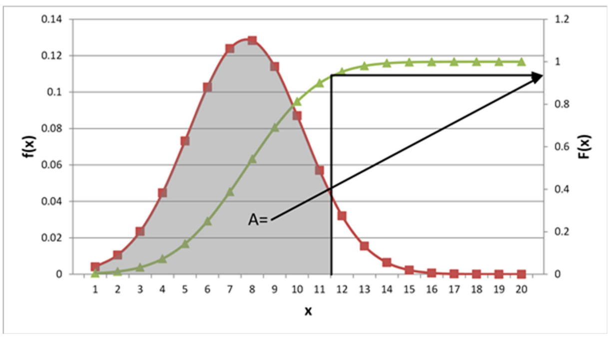
$$F(x) = P[X \leq x] \tag{6}$$

Za diskretne naključne spremenljivke je kumulativna porazdelitvena funkcija enaka vsoti relativnih frekvenc:

$$F_i = \sum_{j \leq i} f_j \tag{7}$$

Za zvezne naključne spremenljivke je kumulativna funkcija enaka integralu gostote porazdelitve verjetnosti v mejah od začetka zaloge vrednosti do določene vrednosti x in predstavlja površino pod krivuljo gostote porazdelitve verjetnosti.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \tag{8}$$




**Slika 3.** Kumulativna porazdelitvena funkcija.

## 1.3 Funkcije gostote porazdelitve verjetnosti

Naša naloga je, da za izbrani vzorec izberemo (predpostavimo) ustrezno porazdelitveno funkcijo in ocenimo njene parametre, ter tako sklepamo o zanesljivosti celotne populacije N. Pri vrednotenju zanesljivosti največkrat uporabljamo naslednje porazdelitvene funkcije:

- Eksponentna porazdelitvena funkcija
- Normalna oziroma Gaussova porazdelitvena funkcija
- Log-normalna porazdelitvena funkcija
- Weibullova porazdelitvena funkcija

### 1.3.1 Eksponentna porazdelitvena funkcija

Eksponentna gostota porazdelitve verjetnosti (Sl.4)

$$f(t) = \lambda \exp[-\lambda t]; \quad 0 \leq \lambda < \infty; \quad 0 \leq t < \infty \tag{9}$$

Kumulativna funkcija eksponentne porazdelitve

$$F(t) = 1 - \exp[-\lambda t] \tag{10}$$

Srednja vrednost in standardna deviacija eksponentne porazdelitve

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \tag{11}$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \tag{12}$$

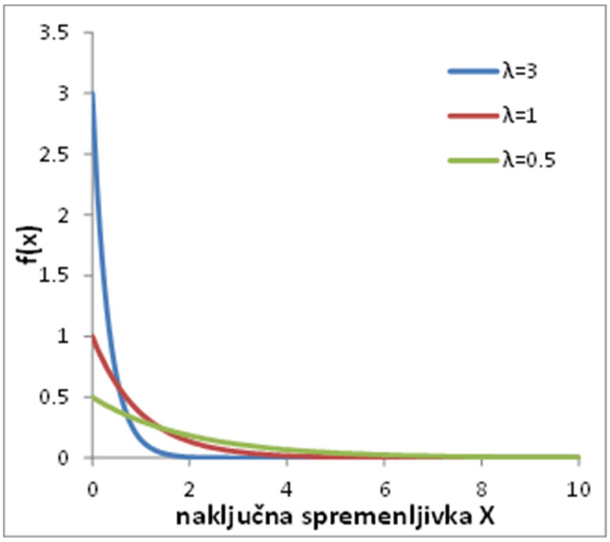
### 1.3.2 Normalna oziroma Gaussova porazdelitvena funkcija

Normalna porazdelitev verjetnosti (Sl.5) je definirana z dvema parametroma in sicer povprečno vrednostjo $\mu$ in standardno deviacijo $\sigma$ vzorca. Definirana je z enačbo:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[ -\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] = N(\mu, \sigma) \tag{13}$$

Kumulativna funkcija normalne porazdelitve

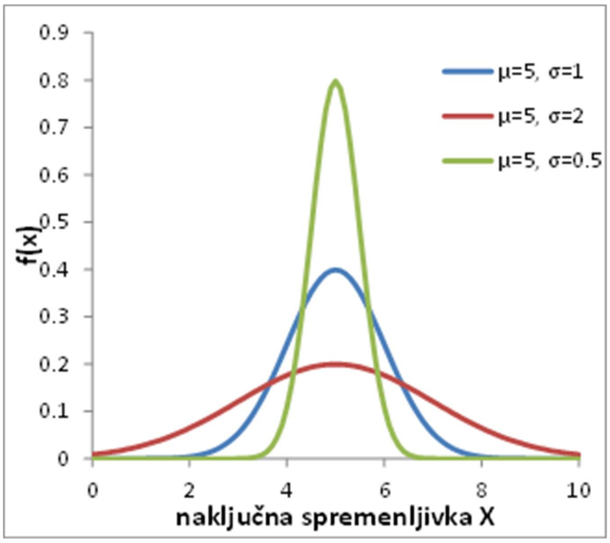
$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{t} \exp\left[ -\frac{(t'-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] dt' \tag{14}$$




**Slika 4.** Eksponentna porazdelitev verjetnosti.

Ker tega integrala analitično ni mogoče izračunati, se normalno kumulativno porazdelitveno funkcijo izračuna s pomočjo transformacije na normirano oz. standardizirano normalno porazdelitev za katero obstajajo tabele. Transformacija se izvede po naslednji enačbi:

$$F(t) = \Phi(z) = \phi(\frac{t-\mu}{\sigma}) \rightarrow z = \frac{t-\mu}{\sigma} \tag{15}$$




**Slika 5.** Normalna porazdelitev verjetnosti.

### 1.3.3 Log-normalna porazdelitvena funkcija

Log-normalna porazdelitev verjetnosti (Sl.6) je definirana z dvema parametroma in sicer medialno vrednostjo vzorca $m$ in oblikovnim številom $s$. Definirana je z enačbo:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}st}\exp\Big[-\frac{1}{2s^2}\big(\ln\frac{t}{m}\big)^2\Big] \tag{16}$$

Kumulativna funkcija log-normalne porazdelitve je definirana z integralom:

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}st}\exp\Big[-\frac{1}{2s^2}\big(\ln\frac{t}{m}\big)^2\Big]dt \tag{17}$$

Ker tega integrala analitično ni mogoče izračunati, se log-normalno kumulativno porazdelitveno funkcijo izračuna s pomočjo transformacije na normirano oz. standardizirano normalno porazdelitev za katero obstajajo tabele. Transformacija se izvede po naslednji enačbi:

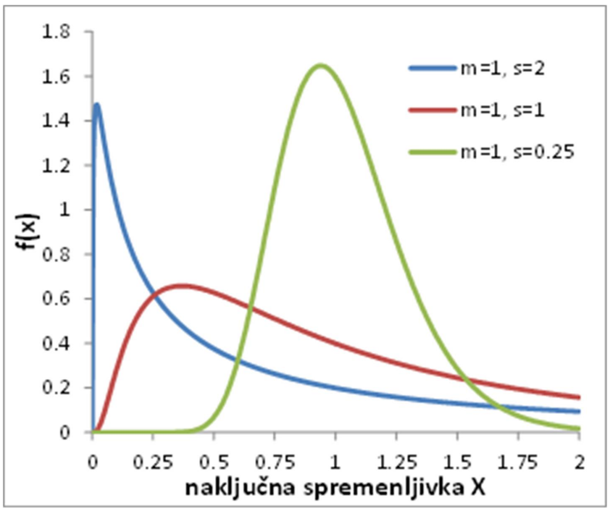
$$F(t) = \Phi(z) = \phi\big(\frac{1}{s}\ln\frac{t}{m}\big) \to z = \frac{1}{s}\ln\frac{t}{m} \tag{18}$$

Srednja vrednost, varianca in standardna deviacija log-normalne porazdelitve:

$$\bar{t} = m\exp[s^2/2] \tag{19}$$

$$S^2 = m^2\exp[s^2][\exp[s^2]-1] \tag{20}$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{m^2\exp[s^2][\exp[s^2]-1]} \tag{21}$$




**Slika 6.** Log-normalna porazdelitev verjetnosti.

Alternativna oblika log-normalne porazdelitve verjetnosti je definirana z dvema parametroma in sicer srednjo vrednostjo $\mu_n$ in standardno deviacijo $\sigma_n$ naravnih logaritmov vzorčnih vrednosti ($\ln(t_i)$). Definirana je z enačbo:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n t}\exp\Big[-\frac{(\ln t - \mu_n)^2}{2\sigma_n^2}\Big] \tag{22}$$

### 1.3.4 Weibullova porazdelitvena funkcija

Weibull-ova porazdelitev verjetnosti (Sl.7) je definirana z dvema parametroma in sicer oblikovnim $\beta$ in velikostnim $\theta$ parametrom. Definirana je z enačbo:

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta}\Big(\frac{t}{\theta}\Big)^{\beta-1}\exp\Big[-\Big(\frac{t}{\theta}\Big)^{\beta}\Big]; \quad \theta > 0; \quad 0 \leq t < \infty \tag{23}$$

Kumulativna funkcija Weibullove porazdelitve

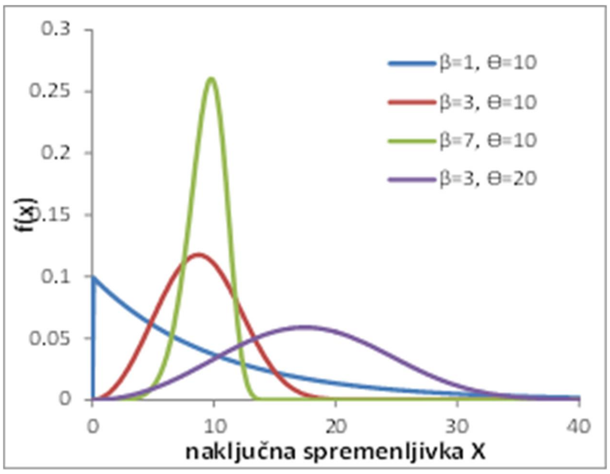
$$F(t) = 1 - \exp\Big[-\Big(\frac{t}{\theta}\Big)^{\beta}\Big] \tag{24}$$

Srednja vrednost, varianca in standardna deviacija Weibull-ove porazdelitve:

$$\bar{t} = \theta\Gamma\big(1 + \frac{1}{\beta}\big) \tag{25}$$

$$S^2 = \theta^2\big[\Gamma\big(1 + \frac{2}{\beta}\big) - \big(\Gamma\big(1 + \frac{2}{\beta}\big)\big)^2\big] \tag{26}$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\theta^2\big[\Gamma\big(1 + \frac{2}{\beta}\big) - \big(\Gamma\big(1 + \frac{2}{\beta}\big)\big)^2\big]} \tag{27}$$




**Slika 7.** Weibull-ova porazdelitev verjetnosti.

## 1.4 Ocenjevanje parametrov Weibullove porazdelitve

Ocena parametrov Weibullove porazdelitve ni trivialna kot pri Gaussovi porazdelitvi verjetnosti, kje določimo le srednjo vrednost ($\mu$) in standardno deviacijo ($\sigma$) ali eksponentni porazdelitvi verjetnosti, kjer določimo le inverz srednje vrednosti ($\lambda = 1/\mu$). Za oceno parametrov Weibullove porazdelitve verjetnosti obstaja več različnih metod. Najbolj uporabljeni sta metoda medialnih rangov (MMR metoda) in metoda največje verjetnosti (MLE metoda).

**Metoda medialnih rangov**

Najprej Weibullovo kumulativno funkcijo verjetnosti preoblikujemo tako, da jo lahko popišemo s premico (Sl.8).

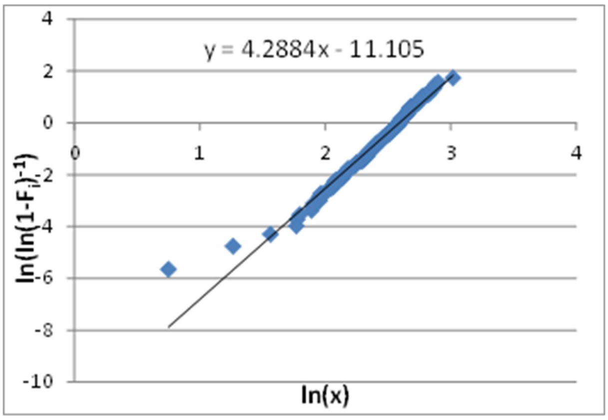
$$
\begin{aligned}
F(t) &= 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right] \\
1 - F(t) &= \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right] \quad / \cdot \ln \\
\ln\big(1 - F(t)\big) &= -\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta} \quad / \cdot (-1) \\
-\ln\big(1 - F(t)\big) &= \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta} \quad / \cdot \ln \\
\ln\big[-\ln\big(1 - F(t)\big)\big] &= \beta \ln\left(\frac{t}{\theta}\right) \\
\ln\big[\ln(1) - \ln\big(1 - F(t)\big)\big] &= \beta \ln(t) - \beta \ln(\theta) \\
\underbrace{\ln\left[\ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)\right]}_{y} &= \underbrace{\beta}_{k} \underbrace{\ln(t)}_{x} - \underbrace{\beta \ln(\theta)}_{b}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)\right] \\
a &= \beta \\
x &= \ln(t) \\
b &= -\beta \ln(\theta)
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Iz enačb sledi, da lahko parametra $a$ in $b$ določimo, če poznamo $F(t)$. Vendar $F(t)$ ne poznamo, zato je to verjetnost potrebno na nek način določiti. Edini podatek, ki ga poznamo je vrednost elementov v vzorcu. $F(t)$ lahko določimo tako, da uporabimo metodo medialnih rangov (MMR). Metoda medialnih rangov zahteva, da podatke v vzorcu razporedimo v tabelo od najmanjšega do največjega. Vsakemu podatku se dodeli vrednost ranga, ki je enaka položaju v tabeli. Nato se z Bernardovo formulo oceni kumulativna verjetnsot, ki pripada določenemu podatku.

$$p_i = \frac{i - 0.3}{n + 0.4} \tag{30}$$

Vrednost parametrov premice $a$ in $b$ ocenimo nato z metodo najmanjšega kvadratičnega odstopanja.




**Slika 8.** Premica po metodi medialnih rangov (MMR).

### Metoda največjega verjetja (MLE)

Metoda največjega verjetja je postopek za iskanje vrednosti enega ali večih parametrov statističnega modela, ki znano funkcijo verjetnosti maksimizirajo oziroma jo naredijo najbolj verjetno. Predpostavimo, da imajo naključne spremenljivke $X_1, ..., X_n$ povezano gostoto porazdelitve verjetnosti $f(x_1, ..., x_n|\theta)$. Glede na opazovane vrednosti $X_i = x_i$, kjer je $i = 1, ..., n$, je verjetnost $\theta$ kot funkcija $x_1, ..., x_n$ definirana

$$\text{lik}(\theta) = f(x_1, x_2, ..., x_n|\theta) \tag{31}$$

Če predpostavimo, da so naključne spremenljivke $X_i$ neodviene in enakomerno porazdeljene, potem je njihova povezana gostota porazdelitve verjetnosti produkt posameznih gostot in funkcija verjetja je tedaj

$$\text{lik}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i|\theta) \tag{32}$$

Namesto, da maksimiramo funkcijo verjetja, je običajno lažje maksimirati njen naravni logaritem. Logaritemska funkcija verjetja je tako

$$\log \text{lik}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left[f(X_i|\theta)\right] \tag{33}$$

Kumulativna funkcija Weibullove porazdelitve se glasi

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right] \tag{34}$$

gostota porazdelitve verjetnosti pa

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right]; \quad \theta > 0; \quad 0 \leq t < \infty \tag{35}$$

Zapišemo logaritemsko funkcijo verjetja za Weibullovo gostoto porazdelitve verjetnosti

$$\begin{aligned}
\ln L &= \sum_{i=1}^{n}\left[\ln(\beta) - \ln(\theta) + (\beta-1)\ln(t_i) - (\beta-1)\ln(\theta) - \left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{\beta}\right] \\
&= n\ln(\beta) - n\ln(\theta) + (\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(t_i) - n(\beta-1)\ln(\theta) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{\beta} \\
&= n\ln(\beta) - n\beta\ln(\theta) + (\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(t_i) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{\beta}
\end{aligned} \tag{36}$$

En. (36) odvajamo po neznanih parametrih.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} &= 0 \\
\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} &= 0
\end{aligned} \tag{37}$$

Rezultat odvodov oziroma končni enačbi parametrov $\beta$ in $\theta$ sta

$$\theta = \sqrt[\beta]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}} \tag{38}$$

$$0 = -\frac{1}{\beta} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(t_i) + \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}\ln(t_i)}{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}} \tag{39}$$

En.(39) je potrebno reševati z uporabo numeričnih metod.

# 2 Osnovni modeli zanesljivosti

## 2.1 Funkcija zanesljivosti, kumulativna porazdelitvena funkcija in gostota porazdelitve verjetnosti

Zanesljivost je definirana kot verjetnost, da bo sistem deloval določen čas $t$. Matematično zanesljivost zapišemo z naslednjo enačbo:

$$R(t) = P\{T \geq t\} \tag{40}$$

kjer je $T$ naključna spremenljivka in označuje čas do okvare. Za funkcijo zanesljivosti veljajo naslednje vrednosti:

$R(t) \geq 0$, $R(0) = 1$ in $\lim_{t\to\infty} = 0$

Za podano vrednost časa $t$, $R(t)$ podaja verjetnost, da je čas do okvare večji ali enak podanemu času $t$.

Verjetnost da se okvara pojavi pred iztekom podanega časa $t$ je definiran z verjetnostjo okvare oziroma kumulativno porazdelitveno funkcijo $F(t)$, ki jo zapišemo z naslednjo enačbo:

$$F(t) = 1 - R(t) = P\{T < t\} \tag{41}$$

za katero velja:

$F(0) = 0$ in $\lim_{t\to\infty} = 1$

Gostota verjetnosti porazdelitve je s kumulativno funkcijo in funkcijo zanesljivosti povezana preko naslednjih dveh enačb:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} \tag{42}$$

in popisuje obliko porazdelitve časov do okvare. Gostota porazdelitve verjetnosti ima naslednji lastnosti:

$f(t) \geq 0$ in $\int_0^\infty f(t)dt = 1$

V kolikor je znana funkcija gostote porazdelitve verjetnosti lahko funkcijo zanesljivosti in kumulativno funkcijo izračunamo z naslednjima enačbama:

$$F(t) = \int_0^t f(t')dt' \tag{43}$$

$$R(t) = \int_t^\infty f(t')dt' \tag{44}$$

Z drugimi besedami, tako funkcija zanesljivosti kot kumulativna funkcija predstavljata površino pod krivuljo definirano z $f(t)$. Ker je površina pod to krivuljo vedno enaka 1 mora veljati naslednje:

$$0 \leq R(t) \leq 1 \quad 0 \leq F(t) \leq 1$$

## 2.2 Srednji čas do okvare (med, mode in var)

Srednji čas do okvare je definiran z naslednjo enačbo:

$$MTTF = E(t) = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty R(t)dt \tag{45}$$

Kar predstavlja povprečni oziroma pričakovani čas do okvare katerega porazdelitev je podana z vrednostjo funkcije gostote porazdelitve $f(t)$. Srednji čas se lahko določi tudi z enačbo:

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt \tag{46}$$

Srednji čas do okvare je le eden od mnogih meril k centralni usmerjenosti funkcije gostote porazdelitve verjetnosti $f(t)$. Poznamo še medialni čas do okvare, ki je definiran kot:

$$R(t_{med}) = 0.5 = P\{T \geq t_{med}\} \tag{47}$$

in modalni čas do okvare, ki ga definira enačba:

$$f(t_{mode}) = \max_{0 \leq t < \infty} f(t) \tag{48}$$

Medialni čas razdeli funkcijo gostote porazdelitve na dva enaka dela s 50% verjetnostjo pojavitve poškodbe pred in 50% po medialnem času. Modalni čas pa označuje kje je funkcija gostote porazdelitve maksimalna in s tem podaja območje kjer je verjetnost okvare za enak časovni interval večja kot za kateri koli drug enako velik interval.

Varianca časov do okvare predstavlja povprečno kvadratično odstopanje časov do okvare od povprečnega časa do okvare in je podana z enačbo:

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (t - MTTF)^2 f(t)dt = \int_0^\infty t^2 f(t)dt - (MTTF)^2 \tag{49}$$

## 2.3 Intenzivnost okvar (ang. Hazard rate function)

Intenzivnost okvar je po definiciji verjetnost da bo sistem odpovedal v naslednjem trenutku (sistem do tega trenutka še ni odpovedal).

Verjetnost, da bo sistem odpovedal v naslednjem trenutku lahko zapišemo z enačbo:

$$P\{t \leq T \leq t + \Delta t\} = R(t) - R(t + \Delta t) \tag{50}$$

Če k temu dodamo še pogoj da sistem do časa $t$ ni odpovedal dobimo naslednje:

$$P\{t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t\} = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)} \tag{51}$$

Pogojna verjetnost na enoto časa predstavlja intenzivnost okvar. Funkcijo intenzivnosti okvar tako lahko zapišemo kot:

$$\frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)} \cdot \frac{1}{\Delta t} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-[R(t + \Delta t) - R(t)]}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} \\ &= \frac{-dR(t)}{dt} \frac{1}{R(t)} \\ &= \frac{f(t)}{R(t)} \end{aligned} \tag{53}$$

Intenzivnost okvar je lahko padajoča, konstantna ali naraščajoča funkcija. Kakšna je pa je odvisno od vrste okvar, ki se na obravnavanem izdelku ali sistemu pojavljajo.

Poljubna intenzivnost okvar enolično določa funkcijo zanesljivosti. To se lahko pokaže z naslednjo izpeljavo:

$$\lambda(t) = \frac{-dR(t)}{dt} \frac{1}{R(t)} \tag{54}$$

$$\lambda(t)dt = \frac{-dR(t)}{R(t)} \tag{55}$$

Z integriranjem En.(55) dobimo naslednje:

$$\int_0^t \lambda(t')dt' = \int_{R(t=0)=1}^{R(t)} \frac{-dR(t')}{R(t')} \tag{56}$$

$$-\int_0^t \lambda(t')dt' = \ln R(t) \tag{57}$$

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(t')dt'\right] \tag{58}$$

**Kumulativna in povprečna intenzivnost okvar**

Kumulativna intenzivnost okvar za obdobje do časa $t$ je definirana z enačbo:

$$L(t) = \int_0^t \lambda(t')dt' \tag{59}$$

Bolj uporabna vrednost pa je vrednost povprečne intenzivnosti okvar med dvema časoma $t_1$ in $t_2$, ki v določenih primerih lahko nadomesti funkcijo intenzivnosti okvar s konstantno povprečno vrednostjo. Definirana je z enačbo:

$$AFR(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \tag{60}$$

## 2.4 Krivulja banje

Pomembna oblika funkcije intenzivnosti okvar je prikazana na sliki (Slika 10). Zaradi njene oblike je pridobila naziv "Krivulja banje". Sistemi, ki imajo takšno obliko intenzivnosti okvar so podvrženi padajoči intenzivnosti okvar v zgodnji dobi uporabe (otroške okvare), ki ji sledi konstantna intenzivnost okvar (uporabno obdobje ko se pojavljajo le naključne okvare) in nato še naraščajoča intenzivnost okvar v zadnjem obdobju uporabe (okvare zaradi obrabe).

## 2.5 Pogojna zanesljivost

Pogojna zanesljivost je uporabna pri opisovanju zanesljivosti komponente ali sistema po dobi utekanja $T_0$ ali garancijski dobi $T_0$. Pogojna zanesljivost je definirana kot zanesljivost sistema pri pogoju, da je pred tem določen čas $T_0$ že deloval:

$$\begin{aligned} R(t|T_0) &= P\{T > T_0 + t | T > T_0\} \\ &= \frac{P\{T > T_0 + t\}}{P\{T > T_0\}} \\ &= \frac{R(T_0 + t)}{R(T_0)} \end{aligned} \tag{61}$$

**Preostali MTTF**

Ker je $R(t|T_0)$ funkcija zanesljivosti, lahko za to funkcijo določimo preostali $MTTF$ s pomočjo osnovne enačbe:

$$\begin{aligned} MTTF(T_0) &= \int_0^\infty R(t|T_0) dt \\ &= \int_{T_0}^\infty \frac{R(t')}{R(T_0)} dt \\ &= \frac{1}{R(T_0)} \int_{T_0}^\infty R(t') dt' \end{aligned} \tag{62}$$

kjer je $t' = t + T_0$. Za tiste komponente, ki se niso okvarile do časa $T_0$, $MTTF(T_0)$ podaja srednji preostali čas do okvare.

## 2.6 Primeri nalog in rešitve

1. Obravnavaj naslednjo funkcijo zanesljivosti, kjer je $t$ podan v urah:

   $$R(t) = \frac{1}{0.001t + 1}; t \geq 0$$

   (a) Izračunajte zanesljivost po 100 urah obratovanja; po 1000 urah obratovanja.

   (b) Izpeljite funkcijo intenzivnosti okvar. Ali je funkcija naraščajoča ali padajoča?

2. Za komponento je poznana intenzivnost okvar, kjer je t podan v letih:

   $$\lambda(t) = 0.4t; t \geq 0$$

   (a) Poiščite $R(t)$ in določite verjetnost odpovedi komponente znotraj prvega meseca uporabe.

   (b) Kakšna je uporabna doba komponente, če je zahtevana zanesljivost 0.95?

3. Funkcija gostote porazdelitve okvar za sistem je podana z enačbo:

   $$f(t) = 0.01; 0 \leq t \leq 100\text{dni}$$

   Poiščite:

   (a) $R(t)$

   (b) Intenzivnost okvar

   (c) $MTTF$

   (d) Standardno deviacijo

   (e) Medialni čas do okvare

4. Porazdelitev okvar je podana z enačbo:

   $$f(t) = \frac{3t^2}{10^9}; 0 \leq t \leq 1000\text{ur}$$

   (a) Kakšna je verjetnost okvare v prvih 100 urah ko velja garancijska doba?

   (b) Izračunajte $MTTF$.

   (c) Poiščite dobo uporabe pri kateri je zanesljivost 0.99.

5. Znana je funkcija zanesljivosti komponente:

   $$R(t) = e^{-\sqrt{0.001t}}; t \geq 0\text{ur}$$

(a) Izračunajte zanesljivost za 50 urno delovanje.

(b) Pokažite, da je intenzivnost okvar padajoča.

(c) Za primer ko je bilo izvedeno 10 urno vtekanje, določite zanesljivost za 50 urno delovanje.

(d) Ob upoštevanju 10 urnega vtekanja določite dobo uporabe pri kateri je zanesljivost 0.95.

6. Zanesljivost turbinske lopatice se lahko popiše z naslednjo enačbo:

$$R(t) = \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)^2; 0 \leq t \leq t_0$$

kjer je $t_0$ maksimalna doba uporabe lopatice.

(a) Pokažite, da je lopatica podvržena obrabi.

(b) Izračunajte $MTTF$ kot funkcijo maksimalne dobe uporabe.

(c) V kolikor je maksimalna doba uporabe 2000 obratovalnih ur, določite dobo uporabe pri kateri je zanesljivost 0.9?

7. Oglas za robotski sesalnik pravi, da je njegova doba uporabe več kot 10 let. Poznana je tudi funkcija gostote porazdelitve časov do okvare:

$$f(t) = 0.1(1 + 0.05t)^{-3}; t \geq 0$$

Določite zanesljivost za naslednjih 10 let uporabe v kolikor je brez okvare deloval v garancijski dobi, ki znaša 1 leto. Kakšen je srednji čas do okvare v garancijski dobi in kakšen po izteku garancijske dobe ob predpostavki, da v garancijski dobi ni prišlo do okvare?

8. Pasivna komponenta distribucijskega sistema zemeljskega plina in naslednjo funkcijo zanesljivosti:

$$R(t) = 1 - \frac{t^2}{100}; 0 \leq t \leq 10\text{let}$$

Poiščite:

(a) Zanesljivost za 3 letno uporabo.

(b) Kumulativno funkcijo.

(c) Verjetnost okvare med prvim in tretjim letom uporabe $Pr\{1 < T < 3\}$.

(d) Funkcijo gostote porazdelitve časov do okvare.

(e) Srednji čas do okvare.

(f) Medialni in modalni čas do okvare.

**Rešitve:**

1. $R(100) = 0.91; R(1000) = 0.5; \lambda(t) = \frac{0.001}{0.001t+1}$; padajoča funkcija $t \to \infty; \lambda(t) \to 0$
2. $R(t) = e^{-0.2t^2}; F(1/12) = 0.00139; t = 0.506let$
3. $R(t) = 1 - 0.01t; \lambda(t) = \frac{0.01}{1-0.01t}; MTTF = 50dni; \sigma = 28.9dni; t_{med} = 50dni$
4. $R(t) = 1 - \frac{t^3}{10^9}; F(100) = 0.001; MTTF = 750ur; t = 215.4ur$
5. $R(50) = 0.8; \lambda(t) = \frac{0.0005}{\sqrt{0.001t}}$; padajoča funkcija $t \to \infty; \lambda(t) \to 0; R(t|T_0) = 0.865; t = 12.9ur$
6. $\lambda(t) = \frac{2}{t_0-t}$; naraščajoča funkcija (obraba) $\lambda(t \to t_0) = \infty; MTTF = t_0/3; t = 102.6ur$
7. $R(t) = (1+0.05t)^{-2}; R(10|1) = 0.459; MTTF_{\text{v garancijski dobi}} = 20let; MTTF_{\text{po garancijski dobi}} = 21let$
8. $R(3) = 0.91; F(t) = t^2/100; Pr\{1 < T < 3\} = 0.08; f(t) = t/50; MTTF = 6.66let; t_{med} = 7.07let; t_{mode} = 10let$ (grafično iz diagrama $f(t)$)

# 3 Modeli zanesljivosti

## 3.1 Model konstantne intenzivnosti okvar

### 3.1.1 Eksponentna funkcija zanesljivosti

Eksponentna funkcija zanesljivosti je pogosto uporabljena, saj ima konstantno intenzivnost okvar. Okvare, ki so posledica naključnih dogodkov bodo sledile tej porazdelitveni funkciji. V krivulji banje, ta funkcija velja v tako imenovanem "območju obratovanja sistema".

Če predpostavimo, da je $\lambda(t) = \lambda$, $t \geq 0$ in $\lambda > 0$, potem se zanesljivost, kumulativna funkcija verjetnosti in gostota porazdelitve verjetnosti glasijo:

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp\left[-\int_0^t \lambda dt'\right] = \exp[-\lambda t] \quad ; \quad t \geq 0 && (63) \\ F(t) &= 1 - R(t) = 1 - \exp[-\lambda t] && (64) \\ f(t) &= -\frac{dR(t)}{dt)} = \lambda \exp[-\lambda t] && (65) \end{aligned}$$

Srednji čas do okvare in varianca okvar:

$$\begin{aligned} MTTF &= \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty \exp[-\lambda t']dt' = \left.\frac{\exp[-\lambda t]}{-\lambda}\right|_0^\infty = \frac{1}{\lambda} && (66) \\ \sigma^2 &= \int_0^\infty (t - MTTF)^2 f(t)dt = \int_0^\infty \left(t - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda \exp[-\lambda t]dt = \frac{1}{\lambda^2} && (67) \end{aligned}$$

Verjetnost, da bo sistem v stanju delovanja do MTTF je

$$R(t = MTTF) = \exp\left[-\frac{MTTF}{MTTF}\right] = \exp[-1] = 0.367 \tag{68}$$

Model konstantne intenzivnosti okvar je brez spomina. Čas do okvare sistema ni odvisen od tega, koliko časa je sistem predhodno že obratoval. To pomeni, da je verjetnost, da bo sistem obratoval naslednjih 1000 ur neodvisna od teha ali je sistem nov ali je sistem predhodno že obratoval nekaj 100 ali 1000 ur. Matematično to zapišemo:

$$\begin{aligned} R(t|T_0) = \frac{R(t+T_0)}{R(T_0)} = \frac{\exp[-\lambda(t+T_0)]}{\exp[-\lambda T_0]} = \frac{\exp[-\lambda t] \cdot \exp[-\lambda T_0]}{\exp[-\lambda T_0]} \\ = \exp[-\lambda t] = R(t) \end{aligned} \tag{69}$$

To pomeni, da utekanje sistema nima efekta na zanesljivost in zato se z utekanjem zanesljivost sistema ne bo povečala.

## 3.2 Modeli časovno odvisne intenzivnosti okvar

### 3.2.1 Weibullova funkcija zanesljivosti

Weibullova porazdelitev je ena izmed najbolj uporabnih porazdelitvenih funkcij v zanesljivosti. Lahko je uporabljena za modeliranje naraščajoče in padajoče intenzivnosti okvar. Intenzivnost okvar lahko zapišemo kot:

$$\lambda(t) = a \cdot t^b \tag{70}$$

Funkcija $\lambda(t)$ je naraščajoča, če je $a > 0$ in $b > 0$, ter padajoča, če je $a > 0$ in $b < 0$. Funkcijo lahko zapišemo kot:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \quad ; \quad \theta > 0; \beta > 0; t \geq 0 \tag{71}$$

Zanesljivost

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^\infty \lambda(t')dt'\right] = \exp\left[-\int_0^\infty \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t'}{\theta}\right)^{\beta-1} dt'\right] = \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right] \tag{72}$$

Gostota porazdelitve verjetnosti

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt} = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right] \tag{73}$$

Srednji čas do okvare

$$MTTF = \int_0^\infty t f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right] t dt = \theta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \tag{74}$$

Varianca okvar

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (t - MTTF)^2 f(t)dt = \theta^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right)^2\right] \tag{75}$$

Medialni čas do okvare $R(t) = 0.5$

$$\begin{aligned} R(t = t_{med}) &= 0.5 \\ \exp\left[-\left(\frac{t_{med}}{\theta}\right)^{\beta}\right] &= 0.5 \\ t_{med} &= \theta(-\ln(0.5))^{1/\beta} \end{aligned} \tag{76}$$

Modalni čas do okvare Mod $f(t) = \max_{t\geq 0} f(t)$

$$t_{mode} = \begin{cases} \theta\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^{1/\beta} & ; \beta > 1 \\ 0 & ; \beta \leq 1 \end{cases} \tag{77}$$

$t_{mode}$ ni definiran za $\beta \leq 1$, zato se v tem primeru *mod* pojavi v izhodišču.

**Utekanje sistema**

Uporabimo pogojno zanesljivost, ki je definirana z En.(61)

$$R(t|T_0) = \frac{R(t+T_0)}{R(T_0)} = \frac{\exp\left[-\left(\frac{t+T_0}{\theta}\right)^{\beta}\right]}{\exp\left[-\left(\frac{T_0}{\theta}\right)^{\beta}\right]} = \exp\left[-\left(\frac{t+T_0}{\theta}\right)^{\beta} + \left(\frac{T_0}{\theta}\right)^{\beta}\right] \tag{78}$$

Weibullov oblikovni parameter $\beta$

- $0 < \beta < 1$ Padajoča intenzivnost okvar (DFR)
- $\beta = 1$ Eksponentna porazdelitev (CFR)
- $1 < \beta < 2$ Naraščajoča intenzivnost okvar, konkavna (IFR)
- $\beta = 2$ Rayleigheva porazdelitev
- $\beta > 2$ Naraščajoča intenzivnost okvar, konveksna (IFR)
- $3 \leq \beta \leq 4$ Naraščajoča intenzivnost okvar, približuje se normalni porazdelitvi, simetrična

### 3.2.2 Normalna funkcija zanesljivosti

Normalna porazdelitev se uspešno uporablja za modeliranje utrujanja in obrabe.
Gostota porazdelitve verjetnosti

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad ; \quad -\infty < t < \infty \tag{79}$$

Zanesljivost

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(t')dt' = \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(t'-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt' \tag{80}$$

Če vpeljemo novo spremenljivko $z = (T-\mu)/\sigma$, potem bo spremenljivka $z$ imela normalno porazdelitev verjetnsoti s srednjo vrednostjo 0 in standardno deviacijo 1. Gostota porazdelitve verjetnosti $z$ je podana z En.(81) in $z$ imenujemo standardizirana normalna spremenljivka.

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \tag{81}$$

Kumulativna porazdelitvena funkcija je

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(z')dz' \tag{82}$$

$\Phi$ je tabelirana funkcija.

$$F(t) = P\{T \leq t\} = P\left\{\frac{T-\mu}{\sigma} \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right\} = P\left\{z \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \tag{83}$$

Zanesljivost

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \tag{84}$$

Intenzivnost okvar

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - \Phi((t-\mu)/\sigma)} \tag{85}$$

Srednji čas do okvare

$$MTTF = \mu \tag{86}$$

### 3.2.3 Log-normalna funkcija zanesljivosti

Gostota porazdelitve verjetnosti

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}ts} \exp\left[-\frac{1}{2s^2}\left(\ln\frac{t}{t_{med}}\right)^2\right] \quad ; \quad t \geq 0 \tag{87}$$

kjer je $s$ oblikovni parameter in $t_{med}$ parameter položaja. Parametra $s$ in $t_{med}$ sta izračunana iz $\ln(t)$ vrednosti.
Srednji čas do okvare

$$MTTF = t_{med} \exp\left[\frac{s^2}{2}\right] \tag{88}$$

Varianca okvar

$$\sigma^2 = t_{med}^2 \exp[s^2]\big[\exp[s^2] - 1\big] \tag{89}$$

Modalni čas do okvare

$$t_{mode} = \frac{t_{med}}{\exp[s^2]} \tag{90}$$

Kumulativna porazdelitvena funkcija

$$\begin{aligned}F(t) &= P\{T \leq t\} = P\{\ln(T) \leq \ln(t)\} \\ &= P\left\{\frac{\ln(T) - \ln(t_{med})}{s} \leq \frac{\ln(t) - \ln(t_{med})}{s}\right\} \\ &= P\left\{z \leq \frac{1}{s}\ln\left(\frac{t}{t_{med}}\right)\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{1}{s}\ln\left(\frac{t}{t_{med}}\right)\right)\end{aligned} \tag{91}$$

Zanesljivost

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{s}\ln\left(\frac{t}{t_{med}}\right)\right) \tag{92}$$

## 3.3 Primeri nalog in rešitve

1. Komponenta in konstantno intenzivnost okvar (CFR) z $MTTF = 1100\,h$. Določite:
   (a) Zanesljivost po $200\,h$ obratovanja.
   (b) Kakšna je uporabna doba komponente, če je zahtevana zanesljivost 0.90?
   (c) Medialni čas do okvare.
2. Sistem s konstantno intenzivnostjo okvar $\lambda = 0.0004$ je obratoval $1000\,h$. kakšna je verjetnost, da bo sistem odpovedal v naslednjih $100\,h$ in $1000\,h$?
3. Sistem ima Weibullovo porazdelitev okvar z oblikovnim parametrom $\beta = 1.4$ in velikostnim parametrom $\theta = 550\,dni$. Določite:
   (a) $R(100\,dni)$
   (b) Kakšna je uporabna doba sistema, če je zahtevana zanesljivost 0.99?
   (c) $MTTF$
   (d) Standardno deviacijo časa do okvare
   (e) Medialni čas do okvare
   (f) Modalni čas do okvare
   (g) Kakšna je uporabna doba sistema, če je zahtevana zanesljivost 0.90?
4. Turbinska lopatica ima Weibullovo porazdelitev s padajočo intenzivnostjo okvar. Parameter oblike $\beta = 0.6$ in parameter velikosti $\theta = 800\,h$.

(a) Izračunaj zanesljivost po $100\,h$ obratovanja.

(b) Kakšna je zanesljivost po $100\,h$ obratovanja, če opravimo $200\,h$ utekanja lopatic?

5. Dizelski agregat ima čas do okvare (v urah) definiran s funkcijo intenzivnosti okvar

$$\lambda(t) = 0.003(\frac{t}{500})^{0.5} \text{za} t \geq 0$$

(a) Kakšna je zanesljivost agregata, če mora nepretrgoma obratovati $50\,h$?

(b) Kakšna je uporabna doba sistema, če je zahtevana zanesljivost 0.90?

(c) Izračunaj $MTTF$.

(d) Predpostavimo, da je agregat obratoval $50\,h$. Kolikšna je verjetnost, da bo preživel naslednjih $50\,h$ obratovanja?

6. Obraba strojnega elementa ima normalno porazdelitev verjetnosti. 90% vseh poškodb se zgodi med $200\,h$ in $270\,h$ uporabe strojnega elementa. (Opomba: 5% vseh poškodb se zgodi pred $200\,h$ in 5% vseh poškodb se zgodi po $270\,h$.)

(a) Določite $MTTF$ in standardno deviacijo časov do okvare.

(b) Kakšna je zanesljivost strojnega elementa, če je ta v uporabi $210\,h$ in potem zamenjan?

(c) Določi uporabno dobo strojnega elementa, če toleriramo 1% verjetnost okvare preden ga zamenjamo.

(d) Če je strojni element bil v uporabi $200\,h$, kakšna je zanesljivost za naslednjih $10\,h$?

7. Po utekanju ugotovimo, da ima uporabna doba ventila log-normalno porazdelitev s $t_{med} = 2236\,h$ in $s = 0.41$

(a) Kakšna je uporabna doba sistema, če je zahtevana zanesljivost 0.98?

(b) Ventil bo vgrajen v črpalko, ki bo obratovala neprekinoma 5 tednov. Kakšna je verjetnost okvare ventila?

(c) Določite $MTTF$.

(d) Določite standardno deviacijo časov do okvare ventila.

(e) Določite $t_{mode}$.

8. Čas do okvare odrezovalnega orodja ima normalno porazdelitev s srednjo vrednostjo 10 delovnih dni in standardno deviacijo 2.5 dni.
   (a) Kakšna je uporabna doba sistema, če je zahtevana zanesljivost 0.99?
   (b) Določite zanesljivost, če je orodje zamenjano (i) vsak dan, (ii) vsaka dva dni in (iii) vsakih pet dni?
   (c) Odrezovalno orodje je bilo v uporabi 5 dni, kakšna je verjetnost, da bo orodje uporabno še en dan?
9. Podjetje se mora odločiti med dvema AC motorjema za uporabo v novem aparatu za gospodinjstvo. Motor A ima CFR $\lambda = 0.000011\, okvar/h$ delovanja. Motor B ima intenzivnost okvar podano s funkcijo $\lambda(t) = 2 \cdot 10^{-10}t$.
   (a) Določite porazdelitveno funkcijo okvar za motor B.
   (b) Primerjajte MTTF obeh motorjev. Na podlagi primerjave določite ustreznejšo izbiro.
   (c) Podjetje ima eno letno garancijo na vse svoje aparate. Kateri motor bi bil ustreznejši v smislu zmanjševanja garancijski stroškov, če motor deluje 2/3 časa? Predpostavi enake stroške zamenjave za oba motorja.
   (d) Kateri motor bi kupec izbral za svoj aparat, da bi zmanjšal stroške zamenjave motorja, če pričakuje, da bo aparat uporabljal 10 let. Opomba: naprava ima eno leto garancije.

**Rešitve:**

1. $R(200) = 0.834; t = 115.9h; t_{med} = 762.46h$
2. $F(100) = 0.04; F(1000) = 0.33$
3. $R(100) = 0.912; t_{0.99} = 20.575dni; MTTF = 500.81dni; \sigma = 363.95dni; t_{med} = 423.32dni; t_{mode} = 224.77dni; t_{0.90} = 110.22dni$
4. $R(100) = 0.750; R(100|200) = 0.887$
5. $\theta = 500h; \beta = 1.5; R(50) = 0.968; t_{0.90} = 111.537h; MTTF = 451.65h; R(50|50) = 0.9438$
6. $MTTF = 235h; \sigma = 21.2; R(210) = 0.881; t_{0.99} = 185.82h; R(10|200) = 0.927$
7. $t_{0.98} = 964.82h; F(5tednov) = 0.00842; MTTF = 2432.06h; \sigma = 1040.55h; t_{mode} = 1890.02h$

8. $t_{0.99} = 4.2dni; R(1) = 0.99984; R(2) = 0.99931; R(5) = 0.97725; R(1|5) = 0.9672$

9. Intenzivnost okvar sledi Weibullovi porazdelitveni funkciji $\beta = 2; \theta = 10^5; MTTF_A = 10.38let; MTTF_B = 10.12let; R_A(5840h) = 0.9377; R_B(5840h) = 0.99659; R_A(9|1) = 0.42011; R_B(9|1) = 0.4678$

# 4 Zanesljivost sestavljenih izdelkov

Posamezne komponente so, v nekem sistemu, lahko medseboj vezane na različne načine. Vezave komponent so: vzporedna vezava, zaporedna vezava in kombinirana vezava. Zanesljivost sestavljenih izdelkov je odvisna od tega, kako so posamezne komponente vezane med seboj.

## 4.1 Zaporedna vezava

Zanesljivost sistema lahko določimo iz zanesljivosti posameznih komponent. Predpostavimo, da je:

$E_1$ dogodek, da komponenta 1 ne odpove in

$E_2$ dogodek, da komponenta 2 ne odpove,

potem je $P\{E_1\} = R_1$ in $P\{E_2\} = R_2$. Skupna zanesljivost dveh komponent je tako:

$$R_S = P\{E_1 \cap E_2\} = P\{E_1\} \cdot P\{E_2\} = R_1 \cdot R_2 \tag{93}$$

En.(93) velja ob predpostavki, da sta komponenti medsebojno neodvisni (to pomeni, da delovanje ali odpoved ene komponente ne vpliva na zanesljivost druge komponente). Sistem bo deloval, če bosta delovali obe komponenti.

Skupna zanesljivost $n$ neodvisnih komponent je:

$$R_S(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdots R_n(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \leq \min\{R_1(t) \cdots R_n(t)\} \tag{94}$$

Neenakost izhaja in tega, da je zanesljivost posamezne komponente med 0 in 1 ($0 \leq R_i \leq 1, i = 1, 2, ..., n$) in produkta. Zanesljivost sistema ne more biti večja od najmanjše zanesljivosti komponente. Zato je pomembno, da imajo posamezne komponente visoko zanesljivost, še posebej, če je sistem velik.

## 4.2 Vzporedna vezava

Dve ali več komponent je lahko vezanih v vzporedno (paralelno, redundantno) vezavo. Sistem bo odpovedal, če bodo odpovedale vse komponente v vzporedni vezavi. Zanesljivost sistema $n$ vzporedno vezanih in neodvisnih komponent je

$$R_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i(t)) \tag{95}$$

Izkaže se, da je $R_S(t) \geq \max\{R_1(t) \cdots R_n(t)\}$, saj je $\prod_{i=1}^{n}(1-R_i(t))$ manjši od verjetnosti okvare najbolj zanesljive komponente.

## 4.3 Kombinirana vezava

Sistem običajno vsebuje komponente, ki so medsebojno vezane vzporedno in zaporedno. Za določitev zanesljivosti sistema je potrebno vezavo sistema razbiti na manjše vzporedno in zaporedno vezane podsisteme. Vsakemu podsistemu pa je potem potrebno poiskati njegovo zanesljivost.

## 4.4 Paralelna vezava k od n

Predpostavimo, da imamo sistem z $n$ vzporedno vezanimi komponentami. Vsaka komponenta ima lahko dve stanji štanje delovanjaž verjetnostjo $R$ in štanje nedelovanjaž verjetnostjo $(1-R)$. Število komponent $X$, ki so v štanju delovanja"je binomska naključna spremenljivka

$$p(x) = \binom{n}{x} R^x (1-R)^{n-x} \tag{96}$$

Verjetnost, da bo vsaj $k$ od $n$ enakih, statistično neodvisnih in vzporedno vezanih komponent delovalo je

$$R_S(t) = \sum_{x=k}^{n} p(x) = \sum_{x=k}^{n} R^x (1-R)^{n-x} \tag{97}$$

## 4.5 Kompleksna vezava

Kompleksna vezava je tista vezava, katere ne moremo enostavno razčleniti na vzporedno ali zaporedno vezavo. Take kompleksne vezave rešujemo po metodi:

- dekompozicije
- naštevanja
- minimalnih poti
- minimalnih rezov
- Monte Carlo simulacij

### 4.5.1 Dekompozicija

Pri dekompoziciji sistem razdelimo na dva podsistema, kjer enkrat določena komponenta dela (zanesljivost $R_1$), drugič pa je ta ista komponenta v okvari (zanesljivost $(1 - R_1)$). Zanesljivost posameznega podsistema je določena posebej (zanesljivost sistema A; $R_A$ in zanesljivost sistema B; $R_B$). Zanesljivost sistema je nato določena z

$$R_S = R_1 R_A + (1 - R_1) R_B \tag{98}$$

### 4.5.2 Naštevanje

Metoda naštevanja se za določitev zanesljivosti sistema uporablja le pri manjših sistemih. Pri tej metodi moramo poiskati vse kombinacije delovanja (S) in nedelovanja (F) posamezne komponente in ugotoviti ali bo sistem s to kombinacijo deloval ali ne. Za vsako kombinacijo je potrebno izračunati verjetnost, da bo sistem deloval ali verjetnost, da sistem ne bo deloval. Vsota vseh verjetnosti, da bo sistem deloval, predstavlja zanesljivost sistema.

### 4.5.3 Funkcija strukture izdelka

Funkcija strukture izdelka je splošen pristop za analiziranje kompleksnih sistemov. Stanje $i$-te komponente zapišemo kot:

$$x_i = \begin{cases} 1; & \text{komponenta dela} \\ 0; & \text{komponenta ne dela} \end{cases} \tag{99}$$

Funkcija strukture izdelka $\Psi(\mathbf{X})$ je definirana kot

$$\Psi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1; & \text{če sistem dela} \\ 0; & \text{če sistem ne dela} \end{cases} \tag{100}$$

in je odvisna od vektorja stanj $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ in vezave sistema.
Funkcija strukture izdelka za zaporedni sistem

$$\Psi_z(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{n} X_i \tag{101}$$

Funkcija strukture izdelka za vzporedni sistem

$$\Psi_v(\mathbf{X}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - X_i) \tag{102}$$

Pri funkciji strukture izdelka je potrebno upoštevati dejstvo $X_i^n = X_i$.
Zanesljivost sistema je povezana s funkcijo strukture izdelka

$$R_S = E[\Psi_v(\mathbf{X})] \tag{103}$$

### 4.5.4 Minimalne poti

Minimalna pot je množica tistih elementov v sistemu, ki morajo biti v stanju delovanja, da sistem deluje. Metoda minimalne poti nam pove, kolikšna je lahko maksimalna zanesljivost sistema, oziroma s to metodo je določena zgornja meja zanesljivosti.

$$\Psi_v(\mathbf{X}) = 1 - \prod_{i=1}^{p} \left(1 - \prod_{j \in P_i} X_j\right) \tag{104}$$

Zanesljivost sistema je

$$R_S = E[\Psi_v(\mathbf{X})] = 1 - \prod_{i=1}^{p} \left(1 - \prod_{j \in P_i} R_j\right) \tag{105}$$

Minimalne poti imajo vzporedno vezavo.

### 4.5.5 Minimalni rezi

Minimalni rez je množica tistih elementov v sistemu, ki morajo biti v stanju nedelovanja, da sistem ne deluje. Metoda minimalnih rezov nam pove, kolikšna je minimalna zanesljivost sistema, oziroma s to metodo je določena spodnja meja zanesljivosti.

$$\Psi_v(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{c} \left(1 - \prod_{j \in C_i} (1 - X_j)\right) \tag{106}$$

Zanesljivost sistema je

$$R_S = E[\Psi_v(\mathbf{X})] = \prod_{i=1}^{c} \left(1 - \prod_{j \in C_i} (1 - R_j)\right) \tag{107}$$

Minimalni rezi imajo zaporedno vezavo.

## 4.6 Redundanca na nizkem in visokem nivoju

REDUNDANCA NA NIZKEM NIVOJU: Vsaka komponenta, ki sestavlja sistem, ima lahko enega ali več vzporedno vezanih komponent.

REDUNDANCA NA VISOKEM NIVOJU: Celoten sistem je lahko vzporedno vezan z enim ali več enakimi sistemi.
Če primerjamo zanesljivosti obeh sistemov lahko ugotovimo, da ima sistem z redundanco na nizkem nivoju večjo zanesljivost, kot sistem z redundanco na visokem nivoju.

## 4.7 Komponente s tremi stanji

Komponente s tremi stanji imajo poleg stanja delovanja še dve stanji nedelovanja, nedelovanje pri zapiranju (short failure) in nedelovanje pri odpiranju (open failure).

### 4.7.1 Zaporedna vezava

$E_1$ odprti sistem želimo zapreti, oba ventila morata odpovedati ($q_s$)

$E_2$ zaprti sistem želimo odpreti, vsaj en ventil mora odpovedati ($q_o$)

$$R_Z = \prod_{i=1}^{n}(1 - q_{oi}) - \prod_{i=1}^{n} q_{si} \tag{108}$$

### 4.7.2 Vzporedna vezava

$E_1$ zaprti sistem želimo odpreti, oba ventila morata odpovedati ($q_o$)

$E_2$ odprti sistem želimo zapreti, vsaj en ventil mora odpovedati ($q_s$)

$$R_Z = \prod_{i=1}^{n}(1 - q_{si}) - \prod_{i=1}^{n} q_{oi} \tag{109}$$

### 4.7.3 Redundanca na nizkem nivoju

$$R_L = \prod_{i=1}^{m}(1 - q_{oi}^{n}) - \prod_{i=1}^{m}(1 - (1 - q_{si}^{n})) \tag{110}$$

### 4.7.4 Redundanca na visokem nivoju

$$R_H = \left(1 - \prod_{i=1}^{m} q_{si}\right)^{n} - \left(1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - q_{oi})\right)^{n} \tag{111}$$

## 4.8 Primeri nalog in rešitve

1. Čas do okvare računalnika (v letih) ima naslednjo gostoto porazdelitve verjetnosti

$$f(t) = \frac{1}{(t+1)^2}; t \geq 10$$

   (a) Če so trije taki računalniki vezani vzporedno, kakšna je njihova zanesljivost prvih 6 mesecev delovanja?

   (b) Kakšna je uporabna doba sistema v dneh, če je zahtevana zanesljivost 0.999?

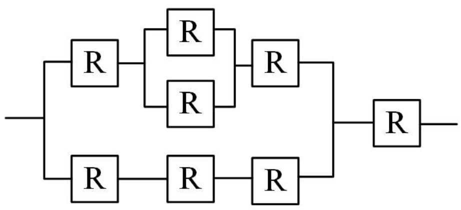
   (c) Kakšna je zanesljivost sistema po 6 mesecih, če 2 od 3 računalnikov morata delati?

2. Kateri sistem ima večjo zanesljivost po 100 urah obratovanja?

   (a) Dve kompomenti s konstantno intenzivnostjo okvar vezani vzporedno. Vsaka ima $MTTF = 1000\,h$.

   (b) Dve komponenti vezani zaporedno. Prva ima Weibullovo intenzivnost okvar ($\beta = 2$, $\theta = 10000\,h$) in druga konstantno intenzivnost okvar ($\lambda = 0.00005\,h^{-1}$).

3. Za podano shemo izpelji izraz za skupno zanesljivost, pri tem pa predpostavi, da imajo vse komponente enako zanesljivost R. Izračunaj skupno zanesljivost sistema, če je $R = 0.9$.

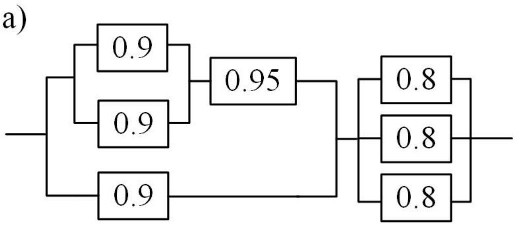



4. Trije komunikacijski kanali so vzporedno vezani in imajo neodvisno intenzivnost okvar $\lambda = 0.1$ okvare/uro. Te tri komponente si delijo skupni oddajnik. Določite $MTTF$ oddajnika tako, da ima sistem zanesljivost 0.85 za 5 urno delovanje. Predpostavite konstantno intenzivnost okvar.

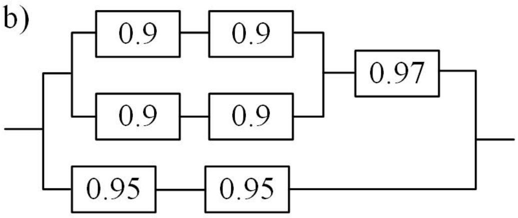
5. Deset Weibullovih komponent, kjer ima vsaka parameter oblike $\beta = 0.8$, mora delovati zaporedno. Določite parameter velikosti $\theta$, če komponente obratujejo 1 leto in je njihova zanesljivost 0.99.

6. Določite zanesljivost sistema a) in b). Določite zanesljivsot komponente $R$ na sliki c), če je zanesljivost sistema $R_S = 0.99$.

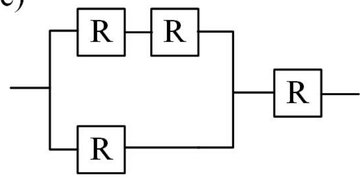
a)




b)

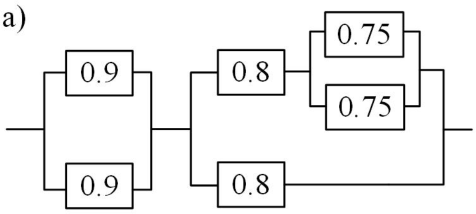



c)

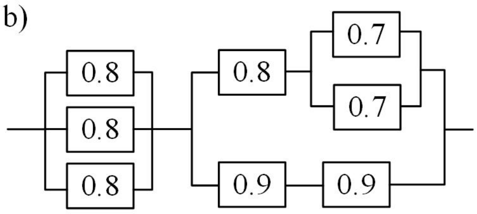



7. Določite zanesljivost sistema naslednjih dveh kombiniranih vezav.

a)

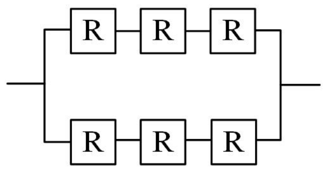



b)

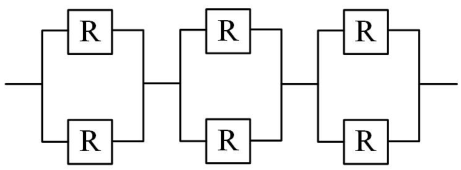


8. Komponente imajo konstantno intenzivnost okvar. Določite srednji čas do okvare komponente (MTTF), do bo imel sistem zanesljivost $R = 0.9$ po $t = 100$ urah obratovanja.

   (a) Redundanca na visokem nivoju

   (b) Redundanca na nizkem nivoju

9. Signalni procesor ima zanesljivost 0.9. Zaradi nizke zanesljivosti je dodan redundantni (paralelni) procesor. Sistem zahteva, da je pred procesorjema vgrajen razvodnik signalov in za procesorjema komparator. Novi komponenti imata zanesljivost 0.95. Ali se z vgradnjo redundantnega signalnega procesorja poveča zanesljivost sistema?

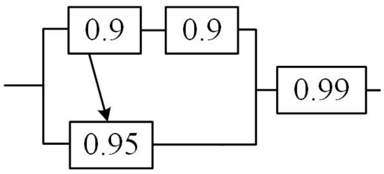
10. Sistem je konstruiran, da obratuje 100 dni. Sestavljen je iz treh komponent, ki so vezane zaporedno. Prva komponenta ima Weibullovo porazdelitveno funkcijo s parametrom oblike 1.2 in parametrom velikosti 840 dni. Druga komponenta ima log-normalno porazdelitveno funkcijo s parametrom oblike 0.7 in mediano 435 dni. Tretja komponenta ima konstantno intenzivnost okvar $\lambda = 0.0001$ okvar/dan.

    (a) Izračunajte zanesljivost sistema.

    (b) Določite zanesljivost za redundanco na visokem nivoju, če sta na rzpolago dve enoti komponent 1 in 2. Predpostavite, da sta komponenti 1 in 2 konfigurirani kot podsistem.

    (c) Določite zanesljivost za redundanco na nizkem nivoju, če sta na rzpolago dve enoti komponent 1 in 2.

11. Sistem na sliki reši po:




(a) Metodi dekompozicije.

(b) Metodi naštevanja.

(c) Metodi minimalnih poti.

(d) Metodi minimalnih rezov.

12. Dokažite, da je $MTTF$ $n$ zaporedno vezanih neodvisnih komponent, kjer ima vsaka komponenta linearno funkcijo intenzivnosti okvar, enak

$$MTTF = \left(\frac{\pi}{2\sum_{i=1}^{n} a_i}\right)^{1/2}$$

kjer je $\lambda_i(t) = a_i t$ in $a_i > 0$.

Namig:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

**Rešitve:**

1. $R(0.5) = 0.96296; t = 40.56\,dni; R_S(t) = 0.7412$

2. $R_{S1}(t) = 0.99094; R_{S2}(t) = 0.9949$

3. $R_S = R^8 - R^7 - R^5 + 2R^4 = 0.67388$

4. $MTTF_O = 50.17\,h$

5. $\theta = 5588.23\,let$

6. $R_{Sa} = 0.9861; R_{Sb} = 0.99365; R_c = 0.99$

7. $R_{Sa} = 0.9405; R_{Sb} = 0.9407$

8. $MTTF_a = 789.28\,h; MTTF_b = 485.92\,h$

9. $R_S = 0.8935$; Zanesljivost sistema se ne poveča.

10. $R_{Sa} = 0.89954; R_{S_b} = 0.9817; R_{Sc} = 0.98414$

11. $R_{Sa} = 0.9806; R_{Sb} = 0.9806; R_{Sc} = 0.9806; R_{Sd} = 0.9806$

# 5 Izdelki odvisni od stanja

## 5.1 Markova analiza

Značilnosti Markove analize:

- Predpostavlja se, da se izdelek vedno nahaja v enem od možnih stanj.
- Stanje izdelka opredeljujejo stanja komponent.
- Verjetnost prehoda iz enega stanja v drugo je izključno odvisno od prehodnega stanja.

Verjetnost, da bo sistem prešel iz enega v drugo stanje je odvisno samo od trenutnega stanja sistema in ne od stanj, ki jih je sistem že doživel. To pomeni, da prehod med stanji sistema ni odvisen od zgodovine sistema oziroma od prejšnjih stanj. Med prehodom iz enega v drugo stanje se lahko zgodi trenutna okvara. Proces prehoda je stacionaren, intenzivnost okvar pa je konstantna $\lambda$. Verjetnost, da se sistem nahaja v stanju $i$ je označeno s $P_i(t)$.
Možna stanja sistema z dvema komponentoma:

| Stanje | 1 | 2 | Sistem zaporedna vezava | Sistem vzporedna vezava |
|---|---|---|---|---|
| 1 | S | S | S | S |
| 2 | F | S | F | S |
| 3 | S | F | F | S |
| 4 | F | F | F | F |

Zanesljivost sistema zaporedno vezanih komponent

$$R_S(t) = P_1(t) \tag{112}$$

Zanesljivost sistema vzporedno vezanih komponent

$$R_S(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) \tag{113}$$

Izdelek se vedno nahaja v enem od stanj, zato lahko zapišemo

$$P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + P_4(t) = 1 \tag{114}$$

Za vsako stanje lahko zapišemo diferencialno enačbo

$$\begin{aligned}\frac{dP_1(t)}{dt} = P_1'(t) &= -\lambda_1 P_1(t) - \lambda_2 P_1(t) && (115)\\ P_2'(t) &= \lambda_1 P_1(t) - \lambda_2 P_2(t) && (116)\\ P_3'(t) &= \lambda_2 P_1(t) - \lambda_1 P_3(t) && (117)\\ P_4'(t) &= \lambda_2 P_2(t) + \lambda_1 P_3(t) && (118)\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} P_1'(t)\\ P_2'(t)\\ P_3'(t)\\ P_4'(t)\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1-\lambda_2 & 0 & 0 & 0\\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & 0\\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2 & \lambda_1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1(t)\\ P_2(t)\\ P_3(t)\\ P_4(t)\end{pmatrix} \tag{119}$$

Rešitev sistema diferencialnih enačb pa predstavlja verjetnost, da se bo sistem nahajal v določemen stanju.

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t] && (120)\\ P_2(t) &= \exp[-\lambda_2 t] - \exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t] && (121)\\ P_3(t) &= \exp[-\lambda_1 t] - \exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t] && (122)\\ P_4(t) &= 1 - P_1(t) - P_2(t) - P_3(t) && (123)\end{aligned}$$

## 5.2 Izdelki z delitvijo obremenitve

Imamo dve komponenti vezani vzporedno, vendar sta komponenti medseboj odvisni. Če ena komponenta odpove, mora druga prevzeti večjo obremenitev in zato se ji intenzivnost okvar poveča.

Sistem diferencialnih enačb za izdelek z delitvijo obremenitve

$$\begin{pmatrix} P_1'(t)\\ P_2'(t)\\ P_3'(t)\\ P_4'(t)\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1-\lambda_2 & 0 & 0 & 0\\ \lambda_1 & -\lambda_2^+ & 0 & 0\\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_1^+ & 0\\ 0 & \lambda_2^+ & \lambda_1^+ & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1(t)\\ P_2(t)\\ P_3(t)\\ P_4(t)\end{pmatrix} \tag{124}$$

Rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t] && (125)\\ P_2(t) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_2^+}\big(\exp[-\lambda_2^+ t] - \exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t]\big) && (126)\\ P_3(t) &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_1^+}\big(\exp[-\lambda_1^+ t] - \exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t]\big) && (127)\end{aligned}$$

Zanesljivost sistema

$$R_S(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) \tag{128}$$

Če je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ in $\lambda_1^+ = \lambda_2^+ = \lambda^+$, potem je srednji čas do okvar

$$MTTF = \frac{1}{2\lambda} + \frac{2\lambda}{2\lambda - \lambda^+}\left(\frac{1}{\lambda^+} - \frac{1}{2\lambda}\right) \tag{129}$$

## 5.3 Pasivna paralelna vezava

Odvisna je od verjetnosti okvare, ki se zgodi med preklopom na sistem, ki je v stanju pripravljenosti. Taki sistemi so bolj zanesljivi, kot aktivni redundantni sistemi.

### 5.3.1 Brez okvar preklopa

$$\begin{pmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ P_3'(t) \\ P_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2^- & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_2^- & 0 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \end{pmatrix} \tag{130}$$

Rešitev sistema diferencialnih enačb

$$P_1(t) = \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2^-)t] \tag{131}$$

$$P_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2^- - \lambda_2}\big(\exp[-\lambda_2 t] - \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2^-)t]\big) \tag{132}$$

$$P_3(t) = \exp[-\lambda_1 t] - \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2^-)t] \tag{133}$$

Zanesljivost sistema

$$R_S(t) = \exp[-\lambda_1 t] + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2^- - \lambda_2}\big(\exp[-\lambda_2 t] - \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2^-)t]\big) \tag{134}$$

Srednji čas do okvar

$$MTTF = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2^-)} \tag{135}$$

### 5.3.2 Enake komponente

Predpostavimo, da imamo $k$ enakih komponent, od katerih ena dela, ostale pa so v pripravljenosti. Ko delujoča komponenta odpove, šele takrat začne delati prva komponenta, ki je v pripravljenosti. Ko odpove prva komponenta, ki je bila v pripravljenosti, začne

delovati druga komponenta, ki je v pripravljenosti in tako naprej, vse do zadnje komponente.
Sistem diferencialnih enačb za pasivno vzporedno vezanih štirih komponent

$$\begin{pmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ P_3'(t) \\ P_4'(t) \\ P_5'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \\ P_5(t) \end{pmatrix} \tag{136}$$

Zanesljivost sistema, sestavljenega iz $n$ enakih komponent in pripadajoči srednji čas do okvar

$$R_S(t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(t) = \exp[-\lambda t] \sum_{i=1}^{n} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \tag{137}$$

$$MTTF = \int_0^\infty R_S(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^i \exp[-\lambda t]}{i!} dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(i+1)}{\lambda i!} = \frac{n}{\lambda} \tag{138}$$

### 5.3.3 Z okvarami preklopa

Realno ni nič nenavadnega, da imajo sistemi v pripravljenosti določeno verjetnost okvare preklopa $p$. Če se zgodi okvara na preklopu, pomeni, da sistem ne bo deloval, saj nadomestnega sistema oziroma sistema v pripravljenosti ne moremo vklopiti.
Sistem diferencialnih enačb za pasivno vzporedno vezavo z napakami preklopa

$$\begin{pmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ P_3'(t) \\ P_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -q\lambda_1 - p\lambda_1 - \lambda_2^- & 0 & 0 & 0 \\ q\lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_2^- & 0 & -\lambda_1 & 0 \\ p\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \end{pmatrix} \tag{139}$$

$q = 1 - p$. Rešitev sistema diferencialnih enačb

$$P_1(t) = \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2^-)t] \tag{140}$$

$$P_2(t) = \frac{q\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2^- - \lambda_2}\big(\exp[-\lambda_2 t] - \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2^-)t]\big) \tag{141}$$

$$P_3(t) = \exp[-\lambda_1 t] - \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2^-)t] \tag{142}$$

Zanesljivost sistema

$$R_S(t) = \exp[-\lambda_1 t] + \frac{q\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2^- - \lambda_2}\big(\exp[-\lambda_2 t] - \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2^-)t]\big) \tag{143}$$

## 5.4 Degradirani izdelki

Nekateri izdelki lahko delujejo, ko se je zgodila določena okvara, oziroma lahko delujejo v tako imenovanem degradiranem stanju. Tak sistem sicer opravlja svojo funkcijo, vendar ne pri nazivni (specificirani, navedeni) ravni, oziroma v manjšem obsegu.
Primer: Letalo, kateremu odpove en od motorjev, kopirni stroj z okvaro avtomatskega podajanja papirja, avtomobil s počeno pnevmatiko.
Neglede na to, ali degradirano stanje obravnavamo kot okvaro ali ne, je to potrebno upoštevati pri izračunu zanesljivosti. Pomembno pa je, da ločimo med degradiranim stanjem in stanjem nedelovanja.
Predpostavimo konstantno intenzivnost okvar. Stanje 1 je stanje delovanja, stanje 2 je degradirano stanje in stanje 3 je stanje nedelovanja.
Sistem diferencialnih enačb

$$\begin{pmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ P_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} \tag{144}$$

Rešitev sistema diferencialnih enačb

$$P_1(t) = \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t] \tag{145}$$

$$P_2(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3}\big(\exp[-\lambda_3 t] - \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t]\big) \tag{146}$$

$$P_3(t) = 1 - P_1(t) - P_2(t) \tag{147}$$

Zanesljivost sistema

$$R_S(t) = P_1(t) + P_2(t) \tag{148}$$

## 5.5 Izdelki s tremi stanji

Komponente imajo 3 stanja, 1 stanje delovanja in 2 stanji nedelovanja (nedelovanje pri odpiranju in nedelovanje pri zapiranju). Ker sta stanji nedelovanja medseboj povezani, lahko uporabimo Markovo analizo za določitev zanesljivosti komponente, pri tem pa predpostavljamo konstantno intenzivnost okvar.
Stanje 1 je stanje delovanja, stanje 2 je stanje nedolovanja pri odpiranju in stanje 3 je stanje nedelovanja pri zapiranju.

Sistem diferencialnih enačb

$$\begin{pmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ P_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} \tag{149}$$

Rešitev sistema diferencialnih enačb

$$P_1(t) = \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t] \tag{150}$$

$$P_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\big(1 - \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t]\big) \tag{151}$$

$$P_3(t) = 1 - P_1(t) - P_2(t) \tag{152}$$

Zanesljivost sistema

$$R_S(t) = \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t] \tag{153}$$

## 5.6 Primeri nalog in rešitve

1. Za delovanje sprejemnika potrebujemo dve Ni-Cd bateriji. Če obe bateriji delata paralelno, potem je intenzivnost okvar vsake baterije $\lambda_1 = 0.1$ okvare/leto. Če ena baterija odpove, lahko sprejemnik še vedno dela samo z eno. V tem primeru se intenzivnost okvar delujoče baterije potroji. Določite zanesljivost sistema za 1, 2, 3, 4 in 5 let delovanja sprejemnika. Določite tudi MTTF sistema.

2. Računalniško podprt sistem ima stalno priključen glavni računalnik in pasivno vezan sekundarni računalnik, ki je v stanju pripravljenosti. Intenzivnost okvar glavnega računalnika je $\lambda_1 = 0.001$ okvar/uro, intenzivnost okvar sekundarnega računalnika pa je $\lambda_1 = 0.005$ okvar/uro. V stanju pripravljenosti okvare niso možne.

   (a) Določite zanesljivost po 72 urah.

   (b) Želimo imeti sistem z $MTTF = 2000$ ur. Kakšen naj bo $MTTF$ glavnega računalnika, ob predpostavki, da se $MTTF$ sekundarnega računalnika ne spremeni.

3. Računalniško podprt sistem ima stalno priključen glavni računalnik in pasivno vezan sekundarni računalnik, ki je v stanju pripravljenosti. Intenzivnost okvar glavnega računalnika je $\lambda_1 = 0.001$ okvar/uro, intenzivnost okvar sekundarnega računalnika pa je $\lambda_1 = 0.005$ okvar/uro. Verjetnost okvare preklopa je 0.005.

   (a) Določite zanesljivost po 72 urah.

(b) Želimo imeti sistem z $MTTF = 2000$ ur. Kakšen naj bo $MTTF$ glavnega računalnika, ob predpostavki, da se $MTTF$ sekundarnega računalnika ne spremeni.

4. Določite kateri sistem je po 100 urah najbolj zanesljiv.

   (a) Sistem z dvema paralelnima komponentama, ki imata konstantno intenzivnost okvar ($\lambda_1 = 0.0034$ ok./h, $\lambda_2 = 0.0105$ ok./h).

   (b) Pasivni paralelni sistem dveh komponent z okvarami preklopa ($\lambda_1 = 0.0034$ok./h,$\lambda_2 =$ 0.0105 ok./h, $\lambda_2^- = 0.0005$ ok./h, $p = 15\%$).

   (c) Sistem z delitvijo obremenitve, kjer se pri delovanju samo ene komponente intenzivnost okvar poveča za faktor 1.5 ($\lambda_1 = 0.0034$ ok./h,, $\lambda_2 = 0.0105$ ok./h).

   (d) Določite $MTTF$ vseh treh sistemov.

5. Stroj, ki se uporablja v proizvodnem procesu, popolnoma odpove z intenzivnostjo 0.01 okvare/dan. Na stroju se lahko zgodi kakšna napaka in deluje v degradiranem stanju, pri tem pa proizvaja nestandardne dele. To se dogaja z intenzivnostjo 0.05 okvare/dan. Ko enkrat stroj deluje v degradiranem stanju bo popolnoma odpovedal z intenzivnostjo 0.07 okvare/dan. Določite kakšna je verjetnost, da se bo stroj po enem dnevu nahajal v stanju delovanja, v degradiranem stanju in v stanju nedelovanja. Določite tudi $MTTF$ do popolne okvare stroja.

6. Bolnišnica ima tri generatorje. En generator obratuje, dva pa sta v pripravljenosti. V primeru primarne napake, ki se zgodi zaradi nevihte, je intenzivnost okvar konstantna in enaka 0.02 okvare/uro (med nevihto). Predpostavite, da v stanju pripravljenosti okvare niso možne in da nevihta povprečno traja 10 ur. Kakšna je zanesljivost sistema generatorjev?

**Rešitve:**

1. $R_S(t) = e^{-2\lambda t} + \frac{2\lambda}{2\lambda - \lambda^+}\left(e^{-\lambda^+ t} - e^{-2\lambda t}\right); R_S(1) = 0.9745, R_S(2) = 0.9133, R_S(3) = 0.8333, R_S(4) = 0.7456, R_S(5) = 0.6574; MTTF = 8.33\, let$

2. $R_S(t) = e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2^- - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_2^+ t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2^-)t}\right); R_S(72) = 0.9887; MTTF_1 = 1800\, h$

3. $R_S(t) = e^{-\lambda_1 t} + \frac{q\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2^- - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_2^+ t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2^-)t}\right); R_S(72) = 0.9884; MTTF_1 = 1801\, h$

4. a)$R_S(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda_1 t})(1 - e^{-\lambda_2 t}); R_S(100) = 0.8126$, b)$R_S(t) = e^{-\lambda_1 t} + \frac{q\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2^- - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_2^+ t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2^-)t}\right); R_S(100) = 0.855$, c)$R_S(t) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_2^+}\left(e^{-\lambda_2^+ t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}\right) +$

$\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_1^+}\left(e^{-\lambda_1^+ t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right); R_S(100) = 0.745$, d)$MTTF_a = 317.4\,h; MTTF_b = 364.7\,h, MTTF_c = 235.57\,h$

5. $P_1(1) = 0.9417; P_2(1) = 0.04685; P_3(1) = 0.01145; MTTF = 28.57\,dni$
6. $R_S(t) = e^{-\lambda t}\left(1 + \lambda t \frac{\lambda^2 t^2}{2}\right); R_S(10) = 0.9988$

# 6 Fizikalni modeli zanesljivosti

## 6.1 Kovariantni modeli

Do sedaj smo imeli modele zanesljivosti v katerih kot spremenljivka nastopa le čas. Zanesljivost izdelkov pa ni samo odvisna od časa, ampak tudi od drugih parametrov, npr.: električna napetost, tok, korozija, sila, tlak, vlažnost, itd. Modele zanesljivosti, ki poleg časa upoštevajo še druge parametre imenujemo kovariantni modeli.

Definirajmo porazdelitveni parameter $\alpha$, ki predstavlja nominalno življensko dobo

$$\alpha(\mathbf{X}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{154}$$

kjer je $\mathbf{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ kovariantni vektor in $x_i$ i-ta kovarianta (spremenljivka, ki vpliva na zanesljivost).

### 6.1.1 Proporcionalni modeli

Intenzivnosti okvar posameznih komponent so medsebojno povezane.

**EKSPONENTNI MODEL:**

Kovariantni model za konstantno intenzivnost okvar (enostavni model oziroma seštevalni model)

$$\lambda(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{k} a_i x_i \tag{155}$$

kjer so $a_i$ neznani parametri, ki jih je potrebno določiti (npr.: parametrična regresija, nevronske mreže, Taguchi metoda, itd.) in $x_0 = 1$.

**Množilni model**

$$\lambda(\mathbf{X}) = \prod_{i=0}^{k} \exp[a_i x_i] = \exp\left[\sum_{i=0}^{k} a_i x_i\right] \tag{156}$$

Za ta model velja $\lambda(\mathbf{X}) > 0$.

Ne glede na uporabljeni model je zanesljivost dobljena na naslednji način.

$$R(t) = \exp[-\lambda(\mathbf{X})t] \tag{157}$$

## 6.2 Statični modeli zanesljivosti

V določenih primerih zanesljivost ni funkcija časa, ampak je funkcija neke druge spremenljivke, ki na sistem deluje kratek čas. Poškodba sistema je tako posledica trenutnih obremenitev, ki delujejo na sistem in ne predhodne zgodovine ali efektov, primer: pristanek letala. Za popis obremenitev in zdržljivosti bomo uporabljali naključni spremenljivki $X$ in $Y$. Naključna spremenljivka $X$ ima gostoto porazdelitve verjetnosti $f_X(x)$, naključna spremenljivka $Y$ pa gostoto porazdelitve verjetnosti $f_Y(y)$.

Obremenitev: $P\{X \leq x\} = F_X(x) = \int_0^x f_{X'}(x')dx'$

Zdržljivost: $P\{Y \leq y\} = F_Y(y) = \int_0^y f_{Y'}(y')dy'$

### 6.2.1 Naključna obremenitev in konstantna zdržljivost

Zanesljivost je verjetnost, da obremenitev ne preseže zdržljivosti sistema. $X$ predstavlja obremenitev sistema in $K$ predstavlja zdržljivost sistema.

$$R = P\{X \leq K\} = \int_0^K f_X(x)dx = F_X(K) \tag{158}$$

### 6.2.2 Konstantna obremenitev in naključna zdržljivost

Zanesljivost je verjetnost, da zdržljivost sistema preseže obremenitev. $S$ predstavlja obremenitev sistema in $Y$ predstavlja zdržljivost sistema.

$$R = P\{Y \geq S\} = \int_S^\infty f_Y(y)dy = 1 - F_Y(S) \tag{159}$$

### 6.2.3 Naključna obremenitev in naključna zdržljivost

Zanesljivost je verjetnost, da obremenitev manjša od zdržljivosti sistema, oziroma, da je zdržljivost sistema večja od obremenitve sistema. $X$ predstavlja obremenitev sistema in $Y$ predstavlja zdržljivost sistema.

$$R = P\{X \leq Y\} = \int_0^\infty \left[\int_0^y f_X(x)dx\right] f_Y(y)dy = \int_0^\infty F_X(y)f_Y(y)dy \tag{160}$$

Za dani $y$ velja:

$$R(y) = \int_0^y f_X(x)dx = F_X(y) \tag{161}$$

Statična zanesljivost je tako:

$$R = \int_0^\infty R(y) f_Y(y) dy \tag{162}$$

Zanesljivost je odvisna od območja, kjer se obe krivulji prekrivata.

Ekvivalentna enačba za določitev statične zanesljivosti se glasi:

$$R = P\{Y > X\} = \int_0^\infty \left[ \int_x^\infty f_Y(y) dy \right] f_X(x) dx \tag{163}$$

### 6.2.4 Eksponentni primer

Obremenitev in zdržljivost imata eksponentno porazdelitev verjetnosti.

Obremenitev: $f_X(x) = \frac{1}{\mu_x} \exp\left[ -\frac{x}{\mu_x} \right]$

Zdržljivost: $f_Y(y) = \frac{1}{\mu_y} \exp\left[ -\frac{y}{\mu_y} \right]$

$$R = \int_0^\infty \left[ \int_0^y f_X(x) dx \right] f_Y(y) dy = \frac{\mu_y}{\mu_x + \mu_y} \tag{164}$$

### 6.2.5 Normalni primer

Obremenitev in zdržljivost imata normalno porazdelitev verjetnosti.

Obremenitev: $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$

Zdržljivost: $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$

$$R = P\{Y \geq X\} = P\{Y - X \geq 0\} = P\{Z \geq 0\} \tag{165}$$

$$\begin{aligned} Z &= Y - X \\ E[Z] &= E[Y - X] = \mu_y - \mu_x \\ Var[Z] &= Var[Y - X] = \sigma_y^2 + \sigma_x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R = P\{Z \geq 0\} &= P\left\{ \frac{Z - \mu_z}{\sigma_z} \geq 0 - \frac{\mu_y - \mu_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \right\} \\ &= P\left\{ \frac{Z - \mu_z}{\sigma_z} \geq -\frac{\mu_y - \mu_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \right\} \\ &= P\left\{ \frac{Z - \mu_z}{\sigma_z} \leq \frac{\mu_y - \mu_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \right\} \\ &= \Phi\left( \frac{\mu_y - \mu_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \right) \end{aligned} \tag{166}$$

### 6.2.6 Lognormalni primer

Obremenitev in zdržljivost imata lognormalno porazdelitev verjetnosti.

Obremenitev: $X \sim LN(m_x, s_x)$

Zdržljivost: $Y \sim LN(m_y, s_y)$

$$R = P\{Y \geq X\} = P\{Y/X \geq 1\} = P\{\ln(Y/X) \geq \ln(1)\} \tag{167}$$

$$\begin{aligned} Z &= \ln(Y/X) = \ln(Y) - \ln(X) \\ \mu_Z &= \ln(m_y/m_x) \\ Var[Z] &= s_y^2 + s_x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R = P\{Z \geq \ln(1)\} = P\{Z \geq 0\} &= P\left\{\frac{Z-\mu_z}{\sigma_z} \geq \frac{0-\mu_z}{\sigma_z}\right\} \\ &= P\left\{\frac{Z-\mu_z}{\sigma_z} \leq \frac{\mu_z}{\sigma_z}\right\} \\ &= P\left\{\frac{Z-\mu_z}{\sigma_z} \leq \frac{\ln(m_y/m_x)}{\sqrt{s_x^2+s_y^2}}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{\ln(m_y/m_x)}{\sqrt{s_x^2+s_y^2}}\right) \end{aligned} \tag{168}$$

**Tabela 1.** Statična zanesljivost za različne porazdelitvene funkcije

| Porazdelitev | Konstantna zdržljivost | Konstantna obremenitev | Naključna obremenitev in zdržljivost |
|---|---|---|---|
| Eksponentna | $R = 1 - \exp[-\frac{K}{\mu_x}]$ | $R = \exp[-\frac{S}{\mu_y}]$ | $R = \frac{\mu_y}{\mu_x+\mu_y}$ |
| Normalna | $R = \Phi\left(\frac{K-\mu_x}{\sigma_x}\right)$ | $R = 1 - \Phi\left(\frac{S-\mu_y}{\sigma_y}\right)$ | $R = \Phi\left(\frac{\mu_y-\mu_x}{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}\right)$ |
| Lognormalna | $R = \Phi\left(\frac{1}{s_x}\ln(\frac{K}{m_x})\right)$ | $R = 1 - \Phi\left(\frac{1}{s_y}\ln(\frac{S}{m_y})\right)$ | $R = \Phi\left(\frac{\ln(\frac{m_y}{m_x})}{\sqrt{s_x^2+s_y^2}}\right)$ |
| Weibullova | $R = 1 - \exp[-(\frac{K}{\theta_x})^{\beta_x}]$ | $R = \exp[-(\frac{S}{\theta_y})^{\beta_y}]$ | Numerično |

## 6.3 Dinamični modeli zanesljivosti

Če je obremenitev, ki deluje na sistem ponavljajoča, potem lahko pod določenimi pogoji izpeljemo dinamično zanesljivost. Obravnavali bomo dva primera: Periodična obremenitev (obremenitev se ponavlja v enakih intervalih) in naključna obremenitev (obremenitev se pojavlja povsem naključno). V obeh primerih predpostavljamo, da se porazdelitev zdržljivosti sistema s časom ne spreminja (stacionarni proces).

### 6.3.1 Periodična obremenitev

Predpostavimo, da se $n$ obremenitev zgodi v časovnih trenutkih $t_1, t_2, ..., t_n$ z enakimi in neodvisnimi porazdelitvami verjetnosti $F(x)$ in da ima zdržljivost sistema v vsakem časovnem trenutku $t_i$ enako in neodvisno porazdelitev verjetnosti $F_Y(y)$. Recimo, da je $X_i$ obremenitev in $Y_i$ zdržljivost v $i$-tem časovnem trenutku oziroma ciklu. Po $n$ ciklih je zanesljivost enaka $R_n$.

$$\begin{aligned} R_n &= P\{X_1 < Y_1, X_2 < Y_2, ..., X_n < Y_n\} \\ &= P\{X_1 < Y_1\} \cdot P\{X_2 < Y_2\} \cdots P\{X_n < Y_n\} \end{aligned} \tag{169}$$

Pri tem smo predpostavili, da sta obremenitev in zdržljivost vsakega cikla medsebojno neodvisni. Če sta porazdelitvi $X$ in $Y$ za vsak cikel enaki, potem velja $P\{X_i < Y_i\} = R$, kjer je $R$ statična zanesljivost posameznega cikla. Zato za $n$ neodvisnih obremenitev, ki delujejo na sistem velja

$$R_n = R^n \tag{170}$$

Če so obremenitveni intervali znani, potem je dinamična zanesljivost določena kot

$$R(t) = R^n \quad t_n \leq t < t_{n+1}; \quad t_0 = 0 \tag{171}$$

Če so obremenitveni intervali enakomerni $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, potem je dinamična zanesljivost določena kot

$$R(t) = R^n = R^{t/\Delta t} \tag{172}$$

### 6.3.2 Naključna obremenitev

Obremenitev se pojavlja naključno tako, da ima število obremenitev na enoto časa Poissonovo porazdelitev verjetnosti

$$P_n(t) = \frac{(\alpha t)^n \exp[-\alpha t]}{n!}; \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{173}$$

Enačba predstavlja verjetnost, da se $n$ obremenitev pojavi v času $t$.

$\alpha$ - povprečno število obremenitev na enoto časa

$\alpha t$ - povprečno število obremenitev v času $t$

Zanesljivost:

$$\begin{aligned} R(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} R^n P_n(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} R^n \left[ \frac{(\alpha t)^n \exp[-\alpha t]}{n!} \right] \\ &= \exp[-\alpha t] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t R)^n}{n!} \\ &= \exp[-\alpha t] \exp[\alpha t R] \\ &= \exp[-(1-R)\alpha t] \end{aligned} \tag{174}$$

$R$ predstavlja statično zanesljivost. Za pridobitev zadnje vrstice v En.(174) uporabimo naslednje dejstvo iz matematike:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp[x] \tag{175}$$

### 6.3.3 Naključna fiksna obremenitev in zdržljivost (Prva obremenitev naključna)

Obremenitev in zdržljivost sta najprej naključno določeni, porem pa fiksni za vse nadaljnje cikle. Prva obremenitev in zdržljivost sta naključni spremenljivki, vse ostale realizacije obremenitev in zdržljivosti pa so fiksne. V primeru naključnih ciklov je zanesljivost

$$R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n P_n(t) \tag{176}$$

$$R_0 = 1$$

$$R_n = R = P\{X < Y\} \text{ za } n = 1, 2, ...$$

$$R(t) = P_0(t) + R(1 - P_0(t))$$

pri tem uporabimo dejstvo $\sum_{i=0}^{\infty} P_i(t) = 1$. Za Poissonov proces je $P_0(t) = \exp[-\alpha t]$.

$$R(t) = \exp[-\alpha t] + R(1 - \exp[-\alpha t]) = R + (1-R)\exp[-\alpha t] \tag{177}$$

Enačba predstavlja uteženo povprečje.

## 6.4 Primeri nalog in rešitve

1. Podjetje je testiralo kemični kondenzator. Ugotovilo je, da je pri nazivni napetosti 160V njegova intenzivnost okvar po času konstantna, vendar odvisna tudi od temperature in razmerja med delovno in nazivno napetostjo. Funkcija intenzivnosti okvar, ki je definirana na podlagi testiranj, se glasi:

   $$\lambda(t|x) = \exp(-9.48 + 0.01759x_1 + 7.017x_2) \cdot 10^{-3}$$

   kjer $x_1$ predstavlja temperaturo v $°C$ in $x_2$ razmerje med delovno in nazivno napetostjo.

   (a) Kakšna sta MTTF in zanesljivost pri $45°C$ in delovni napetosti 120V po prvih 1000 urah delovanja?

   (b) S spremembo konstrukcije lahko dosežemo temperaturo $330°C$ ali pa povečanje nazivne napetosti kondenzatorja na 200V. Katera sprememba bo prinesla večje povečanje zanesljivosti in za koliko odstotkov?

2. Čas do okvare svedra je log-normalno porazdeljen $s = 1.43$. Iz meritev je bilo ugotovljeno, de je medialni čas svedra odvisen od trdote po Brinellu in gostote materiala v katerega vrtamo. Določena je bila naslednja logaritemska funkcija:

   $$u(x) = 12.31 - 0.0157x_1 - 0.35x_2$$

   kjer $x_1$ predstavlja trdoto po Brinellu in $x_2$ gostoto materiala v $mg/m^3$. Če je bila jeklena pločevina toplotno obdelana na trdoto 200HB in ima gostoto $7.3\,mg/m^3$, kakšna je potem zanesljivost svedra po 30 urah vrtanja.

3. Komponenta ima konstantno zdržljivost 1000 barov. Določite statično zanesljivost, če nanjo delujejo naslednje obremenitve:

   (a) Eksponentna porazdelitev obremenitve s srednjo vrednostjo 500 barov.

   (b) Normalna porazdelitev obremenitve s srednjo vrednostjo 500 barov in standardno deviacijo 5 barov.

   (c) Log-normalna porazdelitev obremenitve z mediano 500 barov in parametrom oblike 0.30.

4. Konstantna obremenitev 250N deluje na nosilec z naslednjimi zdržljivostmi:

   (a) Eksponentna zdržljivost s srednjo vrednostjo 2600N.

(b) Weibullova zdržljivost s parametrom velikosti 2600N in parametrom oblike 0.8.

(c) Log-normalna zdržljivost z mediano 2600N in parametrom oblike 0.9.

Določite statično zanesljivost nosilca.

5. Obremenitev ima eksponentno porazdelitev s srednjo vrednostjo 25. Zdržljivost ima eksponentno porazdelitev. Določite minimalno srednjo vrednost zdržljivosti tako, da bo zanesljivost 0.95.

6. Podjetje je testiralo zavore in ugtovilo, da ima njihova zdržljivost normalno porazdelitev $\mu = 275$N in $\sigma = 25$N. Kakšna je zanesljivost, če je obremenitev normalno porazdeljena s $\mu = 180$N in $\sigma = 30$N?

7. Jez lahko ob poplavi zadrži 20m višine vode. Višina vode ob poplavi je podana s porazdelitveno funkcijo

$$f(x) = 0.25\exp(-0.25x); x \geq 0$$

Poplava se pojavi naključno v povprečju enkrat na vsaki 2 leti.

(a) Določite zanesljivost jeza za čas 10 let.

(b) Določite zanesljivost jeza za čas 20 let.

8. Določite statično zanesljivost sistema.
Obremenitev: $f_X(x) = 1/2; 15 \leq x \leq 17$
Zdržljivost: $fY(y) = 0.08(y - 15); 15 \leq y \leq 20$

9. Betonska konstrukcija je konstruirana, da prenese 464 ton obremenitve. Njena gostota porazdelitve verjetnosti zdržljivosti je podana s funkcijo

$$f_Y(y) = \frac{3y^2}{10^9}; 0 \leq y \leq 1000\,textton$$

(a) Izračunajte statično zanesljivost.

(b) Določite statično zanesljivost, če je obremenitev naključna in podana z gostoto porazdelitve verjetnosti: $f_X(x) = 2(0.001 - 0.000001x); 0 \leq x \leq 1000\,ton$.

(c) Obremenitev iz točke a) deluje na konstrukcijo naključno v skladu s Poissonovim procesom s frekvenco 0.01 obremenitve na leto. Določite življensko dobo konstrukcije, če naj bo zanesljivost 0.99.

10. Zgradba je obremenjena s sunkom vetra v povprečju dva-krat na dan (število sunkov ima Poissonovo porazdelitev). Zgradba lahko prenese obremenitev vetra do

100 $km/h$. Hitrost vetra med sunkom je naključna in ima Weibullovo gostoto porazdelitve verjetnosti z oblikovnim parametrom 2 in velikostnim parametrom 50 $km/h$. Določite funkcijo zanesljivosti zgradbe in srednje število dnevov do porušitve.

11. Gradbeno podjetje je zgradilo stanovanje, ki lahko prenese večjo nevihto s statično zanesljivostjo 0.992. Kakšna je verjetnost, da bo v 25 letih odplačevanja kredita stanovanje poškodovano, če vemo, da se večja nevihta pojavi en-krat na leto? Kakšna je življenska doba stanovanja, če naj bo zanesljivost 0.95?

12. Določite zanesljivost sistema. Zdržljivost in obremenitev imata lognormalno porazdelitev: $m_y = 100, s_y = 0.6, m_x = 20, s_x = 0.8$.

13. Turistični gorski tramvaj pelje turiste na vrh gore dva-krat na dan. Kapaciteta tramvaja je 10 ljudi in v času turistične sezone je običajno poln. Nosilnost tramvaja je 860kg. Če je povprečna masa posameznega potnika 77kg s standardno deviacijo 9kg, kakšna je potem zanesljivost tramvaja po 90 dneh turistične sezone?

14. Cilindrični tank zadržuje plin pod tlakom, ki ima normalno porazdelitev verjetnosti $p = 20$bar in $\sigma_p = 3.45$bar. Cilinder ima srednji premer $D = 635$mm in debelino stene $t = 1.6$mm. Tank je izdelan iz jekla z natezno trdnostjo $R_m = 594$MPa.

    (a) Določite statično zanesljivost tanka.

    (b) Kakšna je statična zanesljivost tanka, če ima natezna trdnost normalno porazdelitev $R_m = 594$MPa in $\sigma_{R_m} = 26.9$MPa?

    (c) Število polnjenj in praznjen tanka s plinom je naključno s srednjim številom obremenitev 10 na leto. Kakšna je zanesljivost tanka čez 5 let za primer a)?

**Rešitve:**

1. a)$MTTF = 30744.16\,h; R(1000) = 0.96799$, b) Sprememba temperature: $MTTF = 40026.83\,h; R(1000) = 0.97533$, Sprememba napetosti: $MTTF = 88080.39\,h; R(1000) = 0.98871$, Večje povečanje zanesljivosti prinese sprememba nazivne napetosti za 2.14%

2. $R(20) = 0.99430$

3. a) $R = 0.86466$, b) $R = 0.99878$, c) $R = 0.98956$

4. a) $R = 0.90832$, b) $R = 0.85462$, c) $R = 0.99534$

5. $\mu = 475$

6. $R = 0.99245$

7. a) $R(10) = 0.96686$, b) $R(20) = 0.93482$
8. $R = 0.946$
9. a) $R = 0.9$, b) $R = 0.9$, c) $t = 10.05\,let$
10. $R(t) = \exp(-0.036632t) = \exp(-\lambda t); MTTF = 27.298\,dni$
11. $R(25) = 0.81873; t = 6.412\,let$
12. $R = 0.94630$
13. $R = 0.99921; R(90) = 0.867399$
14. a) $R = 0.998012$, b) $R = 0.996318$, c) $R(5) = 0.90535$

# 7 Vrednotenje na zanesljivost

## 7.1 Alokacija zanesljivosti

Ko so cilji zanesljivosti sistema določeni, jih je potrebno dodeliti (alocirati) posameznim komponentam, ki sestavljajo sistem. V splošnem mora veljati naslednja neenakost

$$h(R_1(t), R_2(t), ..., R_n(t)) \geq R^*(t) \tag{178}$$

kjer je $R_i(t)$ zanesljivost $i$-te komponente pri času $t$, $R^*(t)$ je ciljna zanesljivost sistema pri času $t$ in $h$ je funkcija, ki zanesljivost komponent povezuje z zanesljivostjo sistema. Oblika funkcije $h$ je odvisna vezava komponent v sistemu (zaporedna-vzporedna vezava). Primer, če so vse komponente vezane zaporedno in je njihova intenzivnost okvar medsebojno neodvisna, potem velja

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \geq R^*(t) \tag{179}$$

**EKSPONENTNI PRIMER**
Če imajo vse komponente konstantno intenzivnost okvar, potem lahko En.(179) zapišemo kot

$$\prod_{i=1}^{n} \exp[-\lambda_i t] \geq R^*(t) \tag{180}$$

oziroma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \lambda_S$, kjer je $\lambda_S$ ciljna intenzivnost okvar sistema.

## 7.2 Optimalna alokacija

Cilj optimalne alokacije so minimalni stroški

$$\begin{aligned} \min C &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x_i) && (181) \\ \prod_{i=1}^{n} (R_i + x_i) &= R^* && (182) \end{aligned}$$

pri pogoju

$$0 < R_i + x_i \geq B_i < 1; \quad i = 1, 2, 3, ..., n \tag{183}$$

kjer je $x_i$ vrednost prirastka zanesljivost $i$-te komponente, $C_i(x_i)$ je funkcija stroškov rasti zanesljivosti in $B_i$ je zgornja meja dosegljive zanesljivosti komponente.

Funkcija stroškov rasti zanesljivosti $C_i(x_i)$ je težko določljiva, običajno pa je to neka konveksna funkcija. Najenostavnejša konveksna funkcija je polinom drugega reda (kvadratna funkcija), zato jo na tem mestu tudi uporabimo.

$$\min C = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2 \tag{184}$$

Če zanemarimo pogoj En.(183) in izenačimo obe strani En.(182), potem lahko določimo optimalne vrednosti $x_i$ z Lagrangeovo metodo

$$L(x_i, \theta) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2 - \theta\big[\prod_{i=1}^{n}(R_i + x_i) - R^*\big] \tag{185}$$

kjer je $\theta$ Lagrangeov multiplikator. Ekstrem funkcije (minimum) $L(x_i, \theta)$ izračunamo tako, da En.(185) parcialno odvajamo in odvode enačimo z nič.

$$\frac{\partial L(x_i,\theta)}{\partial x_i} = 2c_i x_i - \theta \prod_{\substack{i=1 \\ j\neq 1}}^{n} (R_j + x_j) = 0; \quad i = 1, 2, ..., n \tag{186}$$

$$\frac{\partial L(x_i,\theta)}{\partial \theta} = \prod_{i=1}^{n}(R_i + x_i) - R^* = 0 \tag{187}$$

En.(187) pomnožimo s $(R_i + x_i)$ ter preuredimo

$$\theta \prod_{i=1}^{n}(R_i + x_i) = 2c_i x_i (R_i + x_i) = \theta R^* \tag{188}$$

Sledi

$$2c_i x_i^2 + 2c_i x_i R_i - \theta R^* = 0 \tag{189}$$

Rešitev kvadratne enačbe En.(189) je njen pozitivni koren

$$x_i = \frac{-2c_i x_i + \sqrt{4c_i^2 R_i^2 + 8c_i \theta R^*}}{4c_i} \tag{190}$$

## 7.3 ARINC metoda

V literaturi obstaja več metod za alokacijo zanesljivosti. Najstarejša in najpreprostejša je ARINC (Aeronautical Radio INCorporation) metoda. Metoda predpostavlja, da so komponente vezane zaporedno, da so neodvisne in imajo konstantno intenzivnost okvar. Če je $\lambda_i$ intenzivnost okvare $i$-te komponente in je $\lambda^*$ ciljna intenzivnost okvar sistema, potem iz uteži

$$w_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \tag{191}$$

izračunamo nove intenzivnosti okvar

$$\lambda_i = w_i \lambda^* \tag{192}$$

Če intenzivnost okvar ni konstantna, potem operiramo s povprečno intenzivnostjo okvar AFR.

## 7.4 AGREE metoda

AGREE (Advisory Group on Reliability of Electronic Equipment) metoda predpostavlja, da je sistem zgrajen iz $N$ komponent, kjer ima vsaka $n_i$ modulov ali podkomponent vezanih vzporedno.

$t$ - čas delovanja sistema

$R^*(t)$ - ciljna zanesljivost sistema pri času $t$

$N = \sum_i n_i$ - število vseh modulov v sistemu

$n_i$ - število modulov znotraj komponente

$t_i$ - čas delovanja $i$-te komponente

$\lambda_i$ - intenzivnost okvare $i$-te komponente

$w_i$ - faktor vpliva (verjetnost, da do sistem odpovedal, če je odpovedala $i$-ta komponenta)

Z metodo želimo alocirati zanesljivost posameznega modula sistema. Prispevek zanesljivosti $i$-te komponente k zanesljivosti sistema je podan z $[R^*(t)]^{n_i/N}$. Za $i$-to komponento lahko, ob predpostavki eksponentne porazdelitvene funkcije, zapišemo

$$w_i(1 - \exp[-\lambda_i t_i]) = 1 - [R^*(t)]^{n_i/N} \tag{193}$$

Leva stran En.(193) predstavlja verjetnost, da okvara $i$-te komponente povzroči okvaro sistema. Desna stran En.(193) pa predstavlja alocirano verjetnost okvare $i$-te komponente. Z rešitvijo En.(193) dobimo za $\lambda_i$ naslednjo rešitev

$$\lambda_i = -\frac{1}{t_i} \ln \left[ 1 - \frac{1 - R^*(t)^{n_i/N}}{w_i} \right]; \quad i = 1, 2, ..., n \tag{194}$$

## 7.5 Primeri nalog in rešitve

1. Podjetje izdeluje vesoljsko postajo, ki je sestavljena iz štirih večjih podsistemov, kjer ima vsak podsistem Weibullovo porazdelitev okvar.

| Podsistem | $\theta$[leto] | $\beta$ |
|---|---|---|
| Računalnik (C) | 3.5 | 0.91 |
| Letalska elektronika (A) | 4.0 | 0.80 |
| Konstrukcija (S) | 5.0 | 1.80 |
| Ohranjanje življenja (LS) | 6.0 | 1.00 |

Zanesljivost sistema po koncu prvega leta mora biti 0.995. Določite za koliko odstotkov je potrebno povečati zanesljivost posameznega podsistema, da dosežemo ciljno zanesljivost. Predpostavite, da je ciljna zanesljivost vsakega podsistema enaka.

2. Če je redundanca edini način, da dosežemo rast zanesljivosti posameznega podsistema naloge 1), kakšno je potem minimalno število redundantnih enot vsakega podsistema, da dosežemo ciljno zanesljivost podsistema.

3. Z ARINC metodo določite povprečno ciljno zanesljivost posameznega podsistema naloge 1). Predpostavite, da se bo z rastjo zanesljivosti izboljšala le karakteristična doba (parameter velikosti) in ne tudi parameter oblike. Kakšna je ciljna karakteristična doba posameznega podsistema?

4. Z uporabo AGREE metode določite zanesljivost in MTTF osebnega računalnika sestavljenega iz naslednjih komponent:

| Komponenta $i$ | Število delov $n_i$ | Indeks pomembnosti $w_i$ | Čas delovanja $[h/leto]$ $t_i$ |
|---|---|---|---|
| Matična plošča (MP) | 153 | 0.95 | 2000 |
| HDD | 28 | 0.90 | 1000 |
| Napajalnik (N) | 34 | 1.00 | 2000 |

Ciljna zanesljivost za prvo leto delovanja je 0.99.

**Rešitve:**

1. $o_A = 38.91\%; o_C = 37.52\%; o_S = 5.54\%; o_{LS} = 17.99\%$

2. $n_C = 6; n_A = 6; n_S = 3; n_{LS} = 4$

3. $\theta_C = 1013.2\, let; \theta_A = 2525.9\, let; \theta_S = 87.4\, let; \theta_{LS} = 1043.1\, let$

4. $R_{MP} = 0.992488; R_{HDD} = 0.998541; R_N = 0.998411;$
$MTTF_{MP} = 265251.98\, h; MTTF_{HDD} = 684931.51\, h; MTTF_N = 1257861.61\, h$

# 8 Vzdrževalnost

Vzdrževalnost je verjetnost, da bo izdelek, ki se nahaja v stanju nedelovanja, po določenem času in pod določenimi pogoji vzdrževanja mogoče vrniti v stanje delovanja. Vzdrževalnost je običajno funkcija časa in je odvisna od časa popravila. Razlikujemo:

- kurativno vzdrževanje (izdelek se okvari in ga nato popravljamo)
- preventivno vzdrževanje (vzdržujemo na določen interval, neglede na to ali je potrebno ali ne)
- napovedano vzdrževanje (spremljamo stanje izdelka (diagnostika) in se na podlagi tega odločimo ali vzdržujemo ali ne)

Čas popravila $T$ je naključna spremenljivka, saj se popravilo izdelka dokonča v različnih časih. Na čas popravila vpliva: zahtevnost okvare, poškodba različnih komponent, znanje oziroma izkušnje serviserja, število serviserjev, čas iskanja napake, čas testiranja, nastavljanja, meritev, itd.

Naj bo čas popravila $T$ zvezna naključna spremenljivka z gostoto porazdelitve verjetnosti $h(t)$. Kumulativna funkcija popravil je potem

$$P\{T < t\} = H(t) = \int_0^t h(t')dt' \tag{195}$$

En.(195) predstavlja verjetnost, da bo popravilo opravljeno znotraj časa $t$.

Srednji čas popravila

$$MTTR = \int_0^\infty th(t)dt = \int_0^\infty (1 - H(t))dt \tag{196}$$

Varianca popravila

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (t - MTTR)^2 h(t)dt \tag{197}$$

Intenzivnost popravila

$$r(t) = \frac{h(t)}{1 - H(t)} \tag{198}$$

Za štiri porazdelitvene funkcije, ki smo jih obravnavali do sedaj (eksponentna, normalna, lognormalna in Weibullova), ostanejo enačbe popolnoma enake s to razliko, da se spremenijo nekatere oznake v njih. Oznake, ki se spremenijo so naslednje:

- gostota porazdelitve verjetnosti $f(t) \to h(t)$

- kumulativna porazdelitvena funkcija $F(t) \to H(t)$
- srednji čas do okvare $MTTF \to$ srednji čas popravila $MTTR$
- intenzivnost okvar $\lambda(t) \to$ intenzivnost popravila $r(t)$

## 8.1 Čas popravila sistema

Če je izdelek sestavljen iz večih komponent, moramo poznati porazdelitev popravil posamezne komponente. Naj bo $MTTR_i$ srednji čas popravila $i$-te komponente, $f_i$ pričakovano število okvar $i$-te komponente in $q_i$ število enakih komponent tipa $i$.
Srednji čas popravila je tako

$$MTTR_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i f_i MTTR_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i f_i} \tag{199}$$

Pričakovano število okvar $i$-te komponente je

$$f_i = \begin{cases} \frac{t_{0i}}{MTTF_i}; & \text{za obnovitveni proces} \\ \int_0^{t_{0i}} \rho_i(t)dt; & \text{za minimalno popravilo} \end{cases} \tag{200}$$

kjer je $t_{0i}$ celoten čas delovanja $i$-te komponente, $MTTF_i$ srednji čas do okvare $i$-te komponente, $\rho_i(t)$ intenzitetna funkcija (pričakovana stopnja okvar na enoto časa).

## 8.2 Preventivno vzdrževanje

S preventivnim vzdrževanjem lahko vplivamo na zanesljivost sistema. Ta program vzdrževanja lahko zmanjša učinek staranja in obrabe, kar pomembno vpliva na življenjsko dobo sistema. Pri preventivnem vzdrževanju je predpostavljeno, da je sistem vrnjen v prvotno stanje oziroma, da je popravljen "kot nov".

Naj bo $R(t)$ zanesljivost sistema brez vzdrževanja, $T$ časovni interval med preventivnim vzdrževanjem in $R_m(t)$ zanesljivost sistema s preventivnim vzdrževanjem. Potem je

$$\begin{aligned} R_m(t) &= R(t) \quad \text{za} \quad 0 \le t < T \\ R_m(t) &= R(T)R(t-T) \quad \text{za} \quad T \le t < 2T \end{aligned}$$

kjer je $R(T)$ verjetnost preživetja do prvega preventivnega vzdrževanja in $R(t-T)$ verjetnost preživetja v naslednjem intervalu $(t-T)$, če je bil sistem v trenutku $T$ obnovljen v prvotno stanje. Splošno velja

$$R_m(t) = R(T)^n R(t-nT) \quad \text{za} \quad nT \le t < (n+1)T \tag{201}$$

kjer je $R(t)^n$ verjetnost preživetja do $n$-tega preventivnega vzdrževanja in $R(t - nT)$ verjetnost preživetja v intervalu $(t - nT)$.

Srednji čas do okvare pri preventivnem vzdrževanju je izračunan po

$$MTTF_{pm} = \int_0^\infty R_m(t)dt = \frac{\int_0^T R(t)dt}{1 - R(T)} \tag{202}$$

V nekaterih primerih je potrebno upoštevati tudi verjetnost $p$, da se okvara zgodi med procesom popravila. Zanesljivost po $n$ vzdrževalnih posegih z upoštevanjem verjetnosti okvare med popravilom je

$$R_m(t) = R(T)^n(1 - p)^n R(t - nT) \quad \text{za} \quad nT \leq t < (n + 1)T \tag{203}$$

## 8.3 Primeri nalog in rešitve

1. Čas popravila generatorja popisuje gostota porazdelitve verjetnosti

   $$h(t) = \frac{t^2}{333}; 1 \leq t \leq 10\, h$$

   (a) Določite verjetnost, da do popravilo končano v 6 urah.

   (b) Določite MTTF in medialni čas popravila.

2. Podjetje mora izdelati skodelico za kavo, ki ima po 5 letih 90% verjetnost uporabe.

   (a) Kakšen naj bo MTTF, če imajo poškodbe skodelice log-normalno porazdelitev verjetnosti? Predpostavite, da je oblikovni parameter 0.7.

   (b) Če se skodelica poškoduje mora biti popravljena v 4 urah. Kakšna je verjetnost, da bo popravilo opravljena pravočasno, če je čas popravila log-normalno porazdeljen s srednjo vrednostjo 2 uri in oblikovnim parametrom 1.0? Kakšen je najverjetnejši čas popravila ($t_{mode}$)?

3. Čas popravila modula motorja je log-normalno porazdeljen, $s = 1.21$. Navodila zahtevajo, da je 90% popravil dokončanih znotraj 10 ur. Določite medialni čas in srednji čas popravila (MTTR).

4. Obraba zaradi utrujanja strojnega elementa je log-normalno porazdeljena z $MTTF = 10000$ ur in $s = 2.0$. Kakšna je zanesljivost po 550 urah obratovanja, če sistem preventivno vzdržujemo z zamenjavo tega strojnega elementa? Kakšna je zanesljivost po 550 urah obratovanja, če sistema ne vzdržujemo? Ali se vzdrževanje izplača? Predpostavite, da je strojni element zamenjan vsakih 100 ur obratovanja.

5. Čas do okvare naprave je enakomeren med 0 in 1000 urami.

   $f(t) = 0.001; 0 \leq t \leq 1000\, h$

   (a) Določite MTTF.

   (b) Določite MTTF, če bo preventivno vzdrževanje napravo povrnilo v prvotno stanje in je le-to opravljeno vsakih 100 ur.

   (c) Primerjajte zanesljivost z ali brez preventivnega vzdrževanja po 225 urah obratovanja. Predpostavite, 100 urni vzdrževalni interval in verjetnost odpovedi zaradi vzdrževanja 0.01 vsakič, ko je preventivno vzdrževanje opravljeno.

   (d) Ali se zanesljivost značilnoizboljša, če predpostavimo 50 urni interval preventivnega vzdrževanja?

6. Funkcija intenzivnosti okvar rezkalnega stroja je:

   $\lambda(t) = 0.0004521t^{0.8}; t \geq 0\, let$

   Določite katera od opcij bo po 20 letih obratovanja imela večjo zanesljivost.

   (a) Opcija A: Rezkalni stroj deluje do odpovedi (brez popravila).

   (b) Opcija B: Program letnega preventivnega vzdrževanja.

   (c) Opcija C: Paralelna vezava drugega rezkalnega stroja s prvim.

7. Gostota porazdelitve verjetnosti časov do okvar transmisije avtobusa je:

   $f(t) = 0.2 - 0.02t; 0 \leq t \leq 10\, let$

   (a) Kakšna je zanesljivost po koncu 15 mesečne garancije, če avtobus preventivno vzdržujemo vsakih 6 mesecev?

   (b) Izračunajte MTTF za točko a).

8. Letalo je sestavljeno iz podsistemov, ki imajo naslednje parametre zanesljivosti in vzdrževalnosti.

| Podsistem | Porazdelitvena funkcija okvar | Parametri | MTTR |
|---|---|---|---|
| Pogon (P) | Weibull | $\theta = 1000, \beta = 1.7$ | 6.8 |
| Letalska elektronika (LE) | Eksponent | $\lambda = 0.003$ | 3.2 |
| Konstrukcija (K) | Weibull | $\theta = 2000, \beta = 2.1$ | 5.2 |
| Elektronika (E) | Weibull | $\theta = 870, \beta = 1.8$ | 2.0 |
| Okolje (O) | Eksponent | $\lambda = 0.001$ | 4.8 |

(a) Določite MTTR sistema na podlagi pričakovanega števila okvar po 50000 urah letenja letala. Predpostavite obnovitveni proces.

(b) Ponovite analizo iz točke a) ob predpostavki minimalnih popravil. Weibullovo porazdelitveno funkcijo zamenjajte s potenčno in upoštevajte enake parametre. Ali je MTTR sistema občutljiv na vrsto popravila? Ali je število okvar, ki se pojavijo v celotni življenski dobi občutljivo na vrsto popravila?

**Rešitve:**

1. a) $H(6) = 0.2152$, b) $MTTF = 7.51\,h; t_{med} = 7.94\,h$
2. a) $MTTF = 15.650\,let$, b) $H(4) = 0.8849; t_{mode} = 0.445\,h$
3. $t_{med} = 2.125\,h; MTTR = 4.418\,h$
4. Z vzdrževanjem: $R_m(550) = 0.5713$, brez vzdrževanja: $R(550) = 0.6737$, Preventivno vzdrževanje se ne izplača.
5. a) $MTTF = 500\,h$, b) $MTTF_{pm} = 950\,h$, c) $R_m(225) = 0.774$, d) $R_m(225) = 0.763$; Zanesljivost se značilno ne izboljša.
6. a) $R(20) = 0.94631$, b) $R_m(20) = 0.994972$, c) $R_S(20) = 0.997117$
7. a) $R_m(15) = 0.7743$, b) $MTTF = 4.876\,let$
8. a) $MTTR_{SIS} = 3.95\,h$, b) $MTTR_{SIS} = 4.05\,h$, MTTR sistema ni zelo občutljiv na vrsto popravila. Število okvar je zelo občutljivo na vrsto popravila.