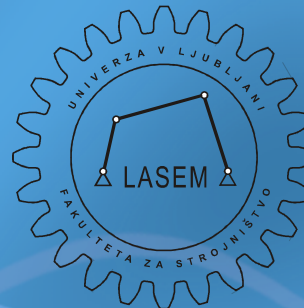


Univerza v Ljubljani
Fakulteta za strojništvo



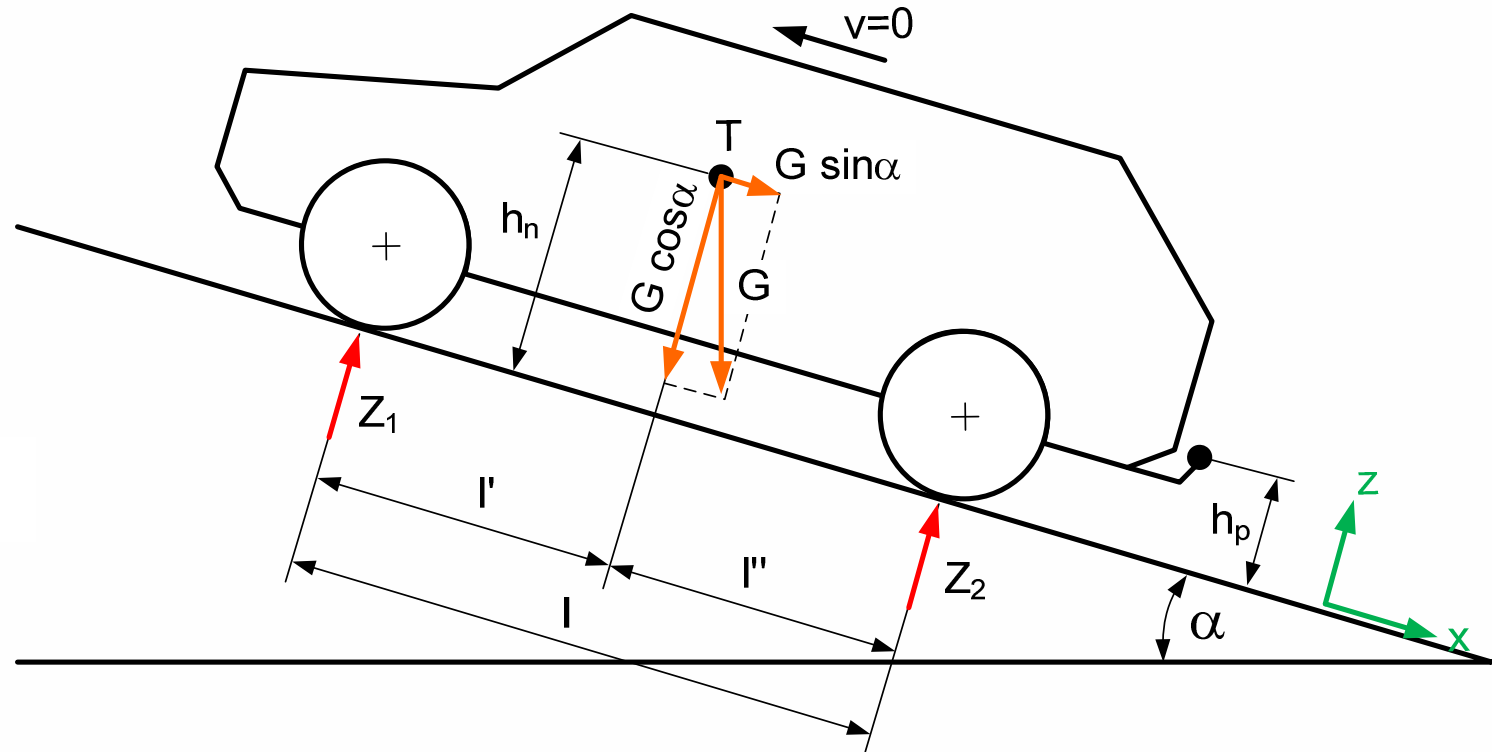
Katedra za strojne elemente in razvojna vrednotenja



DINAMIKA VOZIL – Ravnotežje sil na vozilu

Prof. dr. Jernej Klemenc

Statično ravnotežje sil na strmini



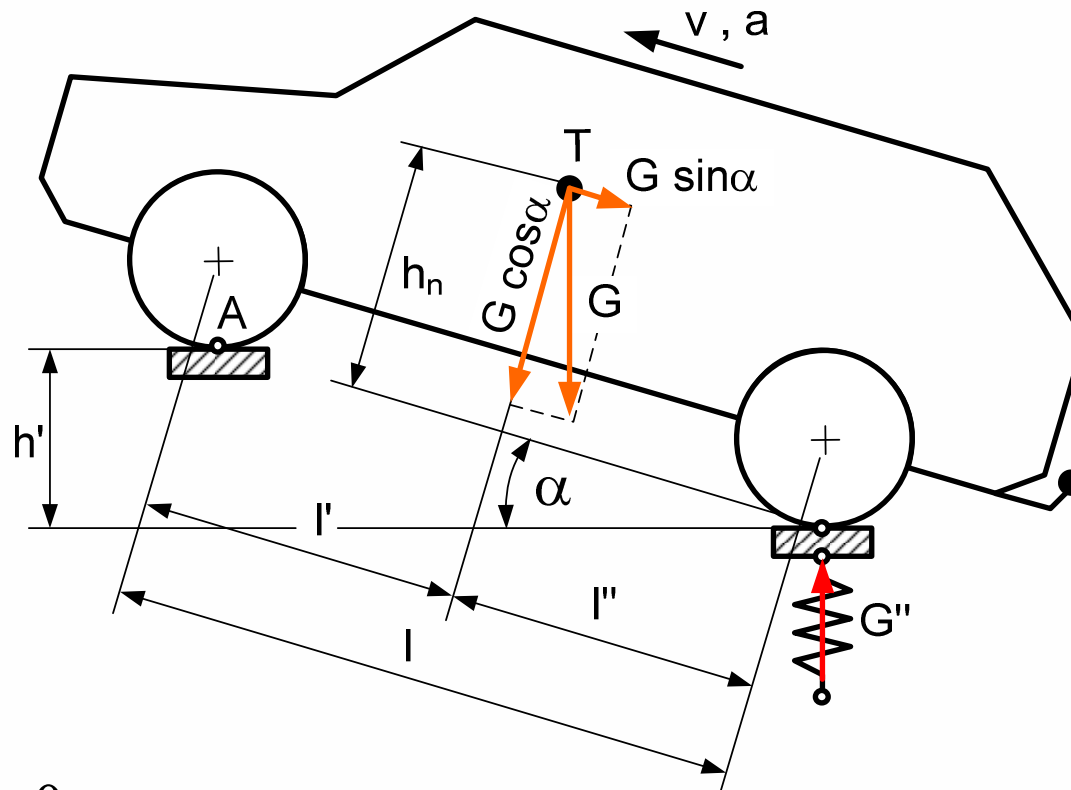
$$Z_1 = \frac{l''}{l} \cdot G \cdot \cos \alpha - \frac{h_n}{l} \cdot G \cdot \sin \alpha$$

$$Z_2 = \frac{l'}{l} \cdot G \cdot \cos \alpha + \frac{h_n}{l} \cdot G \cdot \sin \alpha$$



Statično ravnotežje sil na strmini

- Določitev višine težišča:



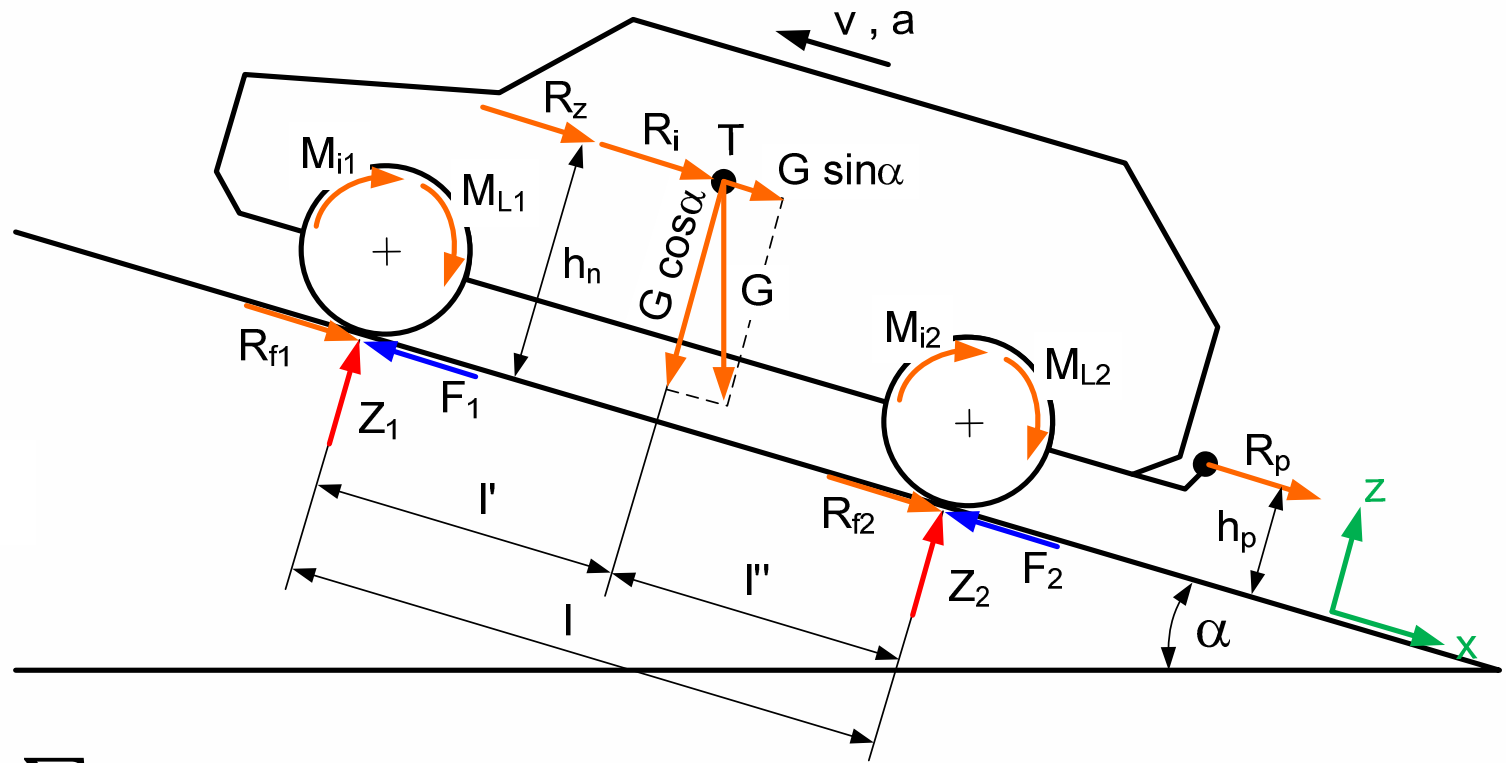
$$\sum M_{\vec{A}} = 0:$$

$$l \cdot G'' \cdot \cos \alpha - l' \cdot G \cdot \cos \alpha - h_n \cdot G \cdot \sin \alpha = 0$$

$$h_n = \left(\frac{G''}{G} \cdot l - l' \right) \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$



Dinamično ravnotežje sil na strmini pri pospeševanju



$$\sum M_{(2)} = 0:$$

$$Z_1 \cdot l = l''' \cdot G \cdot \cos \alpha - h_n \cdot (G \cdot \sin \alpha + R_i + R_z) - (h_p \cdot R_p) - \underbrace{M_{i1} - M_{i2}}_{\approx 0} - M_{L1} - M_{L2}$$



Dinamično ravnotežje sil na strmini pri pospeševanju

$$\sum F_{x(2)} = 0:$$

$$F_1 + F_2 - R_{f1} - R_{f2} = G \cdot \sin \alpha + R_i + R_z + (R_p)$$

$$F_1 + F_2 = F; R_{f1} + R_{f2} = R_f = f \cdot G \cdot \cos \alpha; R_p = 0$$

$$Z_1 = G \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{l''}{l} + \frac{f \cdot h_n}{l} \right) - \frac{h_n}{l} \cdot F - \frac{M_{L1} + M_{L2}}{l}$$

$$\frac{Z_1}{G} = \cos \alpha \cdot \left(\frac{l''}{l} + \frac{f \cdot h_n}{l} \right) - \frac{h_n}{l \cdot G} \cdot F - \frac{M_{L1} + M_{L2}}{l \cdot G}$$

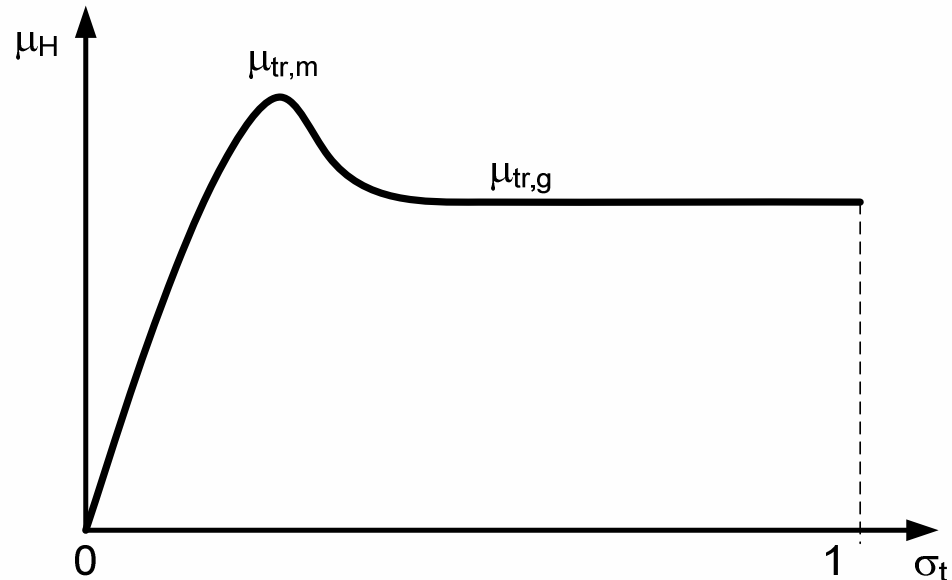
$$Z_2 = G \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{l'}{l} - \frac{f \cdot h_n}{l} \right) + \frac{h_n}{l} \cdot F + \frac{M_{L1} + M_{L2}}{l}$$

$$\frac{Z_2}{G} = \cos \alpha \cdot \left(\frac{l'}{l} - \frac{f \cdot h_n}{l} \right) + \frac{h_n}{l \cdot G} \cdot F + \frac{M_{L1} + M_{L2}}{l \cdot G}$$



Maksimalne pogonske sile

- Pogon na sprednja kolesa:



$$F_{1,\max} = Z_1 \cdot \mu_{H,\max} = Z_1 \cdot \mu_{tr,m}$$

$$F_{1,\max} = \mu_{tr,m} \cdot \left[\frac{l''}{l} \cdot G \cdot \cos \alpha - \frac{h_n}{l} \cdot (F_{1,\max} - f \cdot G \cdot \cos \alpha) \right]$$

$$\frac{F_{1,\max}}{G} = \mu_{tr,m} \cdot \cos \alpha \cdot \frac{l'' + h_n \cdot f}{l + h_n \cdot \mu_{tr,m}}$$



Maksimalne pogonske sile

- Pogon na zadnja kolesa:

$$F_{2,\max} = Z_2 \cdot \mu_{H,\max} = Z_2 \cdot \mu_{tr,m}$$

$$F_{2,\max} = \mu_{tr,m} \cdot \left[\frac{l'}{l} \cdot G \cdot \cos \alpha + \frac{h_n}{l} \cdot (F_{2,\max} - f \cdot G \cdot \cos \alpha) \right]$$

$$\frac{F_{2,\max}}{G} = \mu_{tr,m} \cdot \cos \alpha \cdot \frac{l' - h_n \cdot f}{l - h_n \cdot \mu_{tr,m}}$$

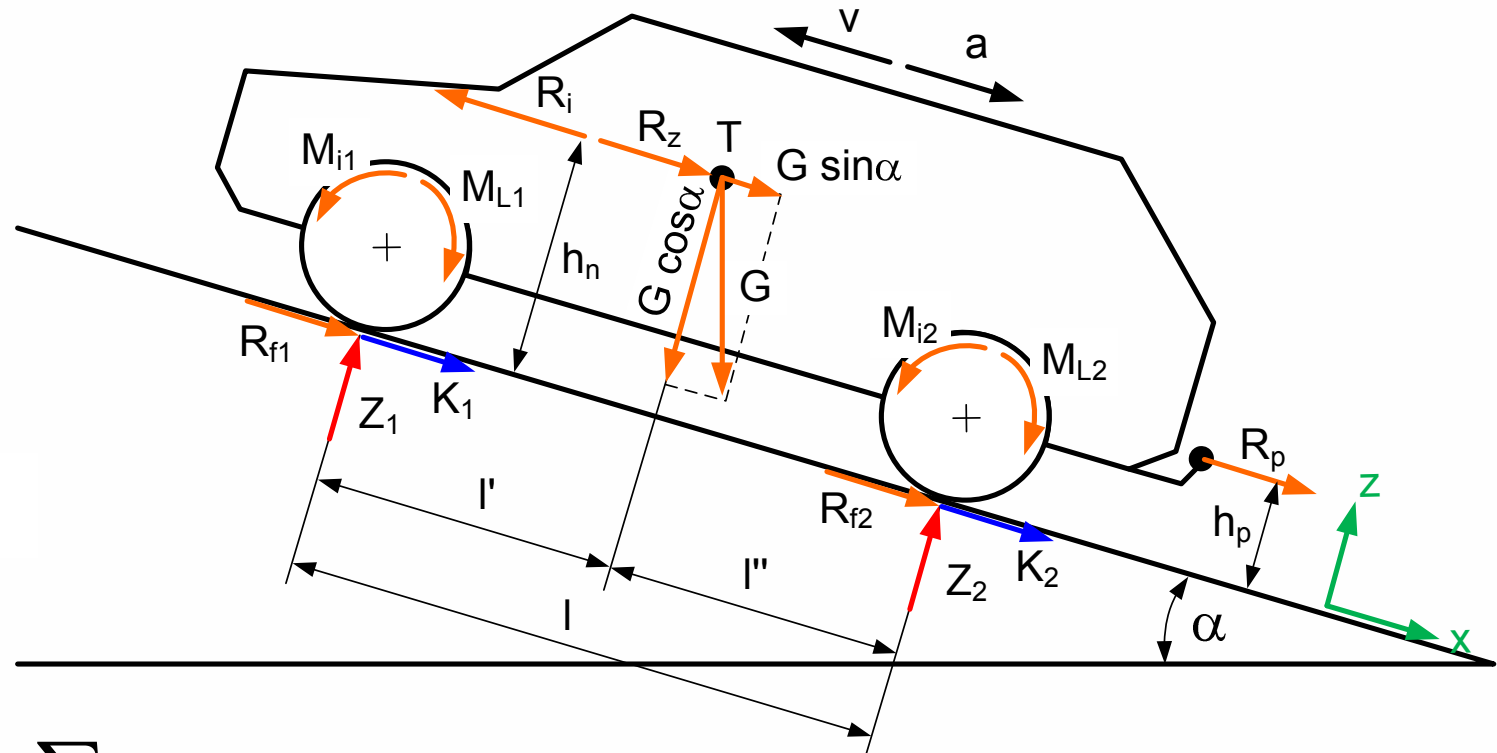
- Pogon na vsa štiri kolesa:

$$\frac{F_{4x4,\max}}{G} = \mu_{tr,m} \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{F_{4x4,1}}{F_{4x4,2}} = \frac{Z_1}{Z_2}$$



Dinamično ravnotežje sil na strmini pri zaviranju



$$\sum M_{(2)} = 0:$$

$$Z_1 \cdot l = l'' \cdot G \cdot \cos \alpha + h_n \cdot (R_i - G \cdot \sin \alpha - R_z) - (h_p \cdot R_p) + \underbrace{M_{i1} + M_{i2}}_{\approx 0} - M_{L1} - M_{L2}$$

Dinamično ravnotežje sil na strmini pri zaviranju

$$\sum F_{x(2)} = 0:$$

$$K_1 + K_2 + R_{f1} + R_{f2} = R_i - \left[G \cdot \sin \alpha + R_z + (R_p) \right]$$

$$K_1 + K_2 = K; R_{f1} + R_{f2} = R_f = f \cdot G \cdot \cos \alpha; R_p = 0$$

$$Z_1 = G \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{l''}{l} + \frac{f \cdot h_n}{l} \right) + \frac{h_n}{l} \cdot K - \frac{M_{L1} + M_{L2}}{l}$$

$$\frac{Z_1}{G} = \cos \alpha \cdot \left(\frac{l''}{l} + \frac{f \cdot h_n}{l} \right) + \frac{h_n}{l \cdot G} \cdot K - \frac{M_{L1} + M_{L2}}{l \cdot G}$$

$$Z_2 = G \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{l'}{l} - \frac{f \cdot h_n}{l} \right) - \frac{h_n}{l} \cdot K + \frac{M_{L1} + M_{L2}}{l}$$

$$\frac{Z_2}{G} = \cos \alpha \cdot \left(\frac{l'}{l} - \frac{f \cdot h_n}{l} \right) - \frac{h_n}{l \cdot G} \cdot K + \frac{M_{L1} + M_{L2}}{l \cdot G}$$



Maksimalne zavorne sile

$$M_{L1} + M_{L2} \approx 0$$

$$K_1 = Z_1 \cdot \mu_H$$

$$K_2 = Z_2 \cdot \mu_H$$

$$K_1 + K_2 = K = Z_1 \cdot \mu_H + Z_2 \cdot \mu_H = \mu_H \cdot G \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{Z_1}{G \cdot \cos \alpha} = \frac{l''}{l} + \frac{h_n}{l} \cdot (f + \mu_H)$$

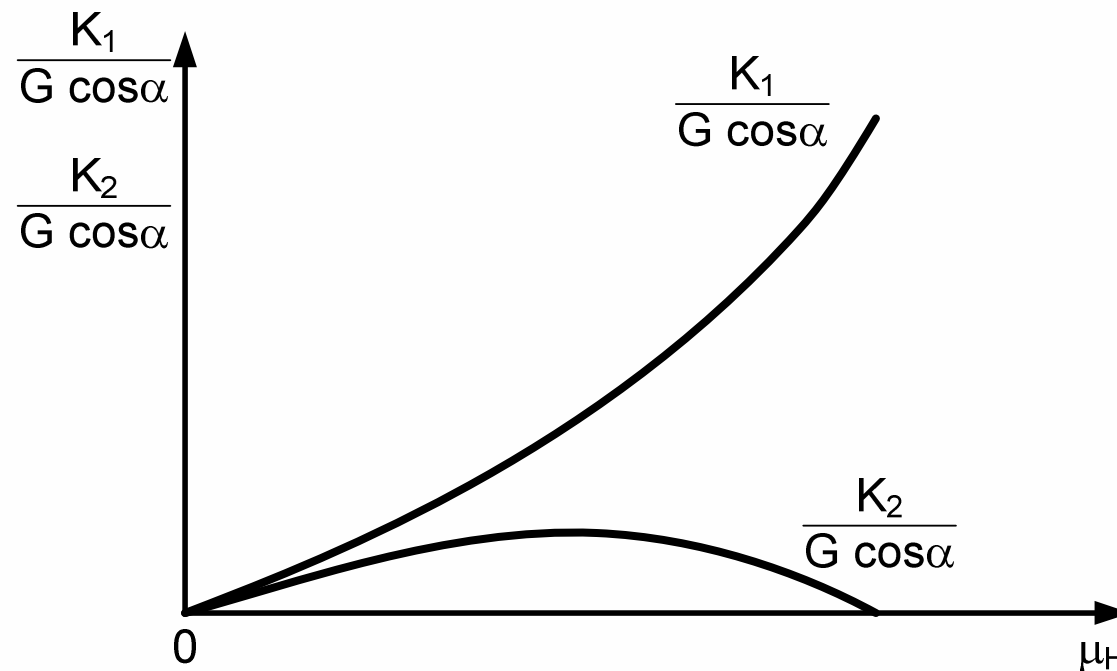
$$\frac{Z_2}{G \cdot \cos \alpha} = \frac{l'}{l} - \frac{h_n}{l} \cdot (f + \mu_H)$$



Maksimalne zavorne sile

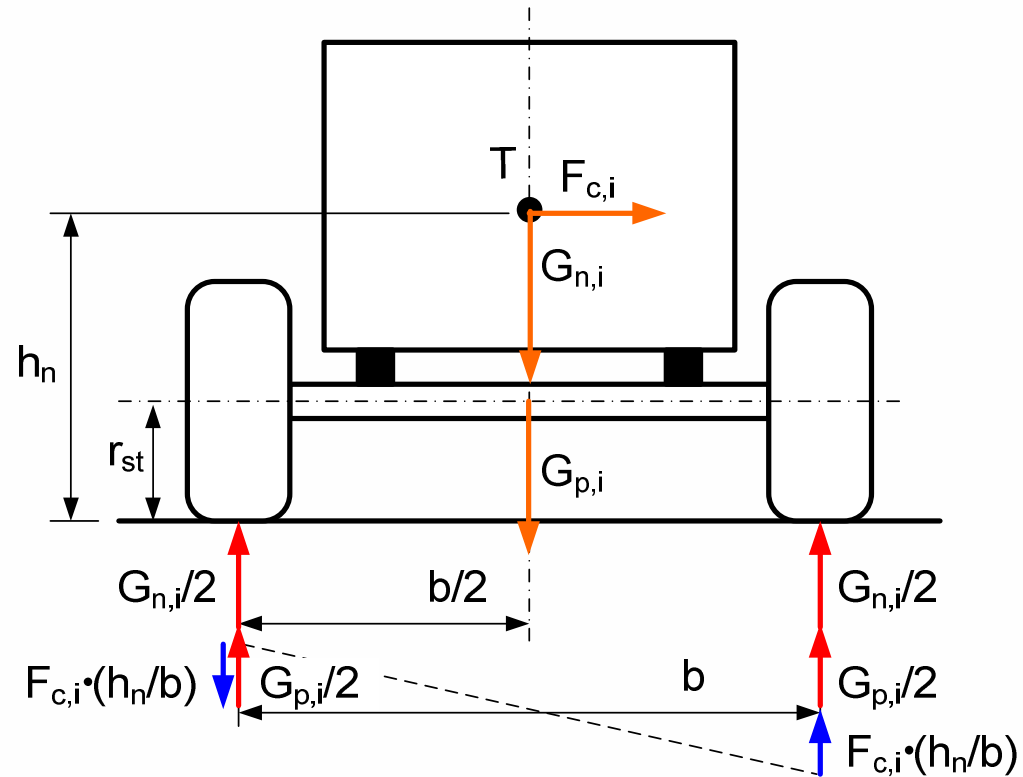
$$\frac{K_1}{G \cdot \cos \alpha} = \frac{\mu_H \cdot Z_1}{G \cdot \cos \alpha} = \mu_H \cdot \left(\frac{l''}{l} + \frac{h_n}{l} \cdot f \right) + \mu_H^2 \cdot \frac{h_n}{l}$$

$$\frac{K_2}{G \cdot \cos \alpha} = \frac{\mu_H \cdot Z_2}{G \cdot \cos \alpha} = \mu_H \cdot \left(\frac{l'}{l} - \frac{h_n}{l} \cdot f \right) - \mu_H^2 \cdot \frac{h_n}{l}$$



Ravnotežje sil na premo vozila pri vožnji v ovinek

- Nevzmetena nadgradnja:



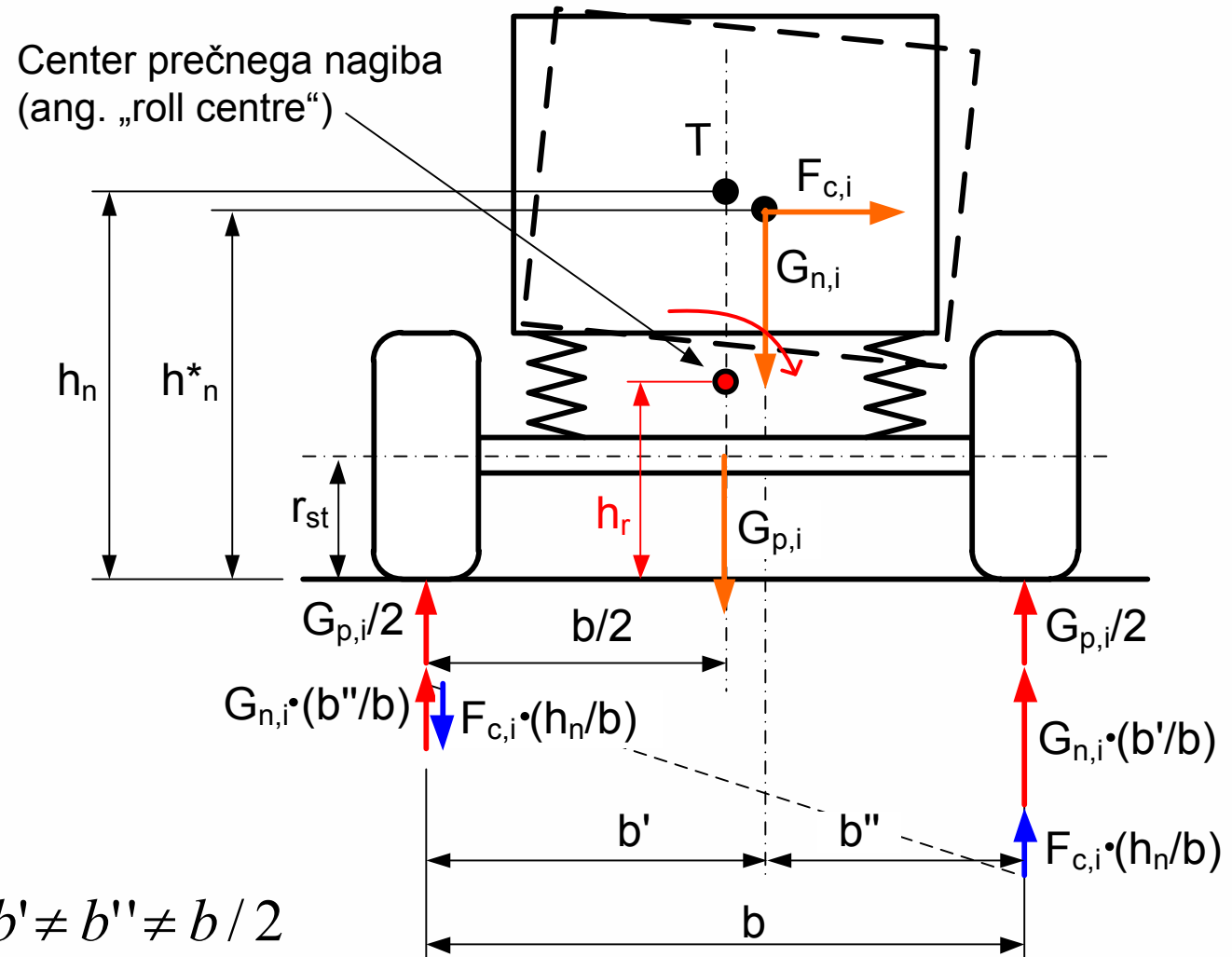
$$G_{n,1} = G \cdot \frac{l''}{l}; G_{n,2} = G \cdot \frac{l'}{l}$$

$$F_c = m_{n+p} \cdot \frac{v^2}{R_{ov}}; F_{c,1} = F_c \cdot \frac{l''}{l}; F_{c,2} = F_c \cdot \frac{l'}{l}$$



Ravnotežje sil na premo vozila pri vožnji v ovinek

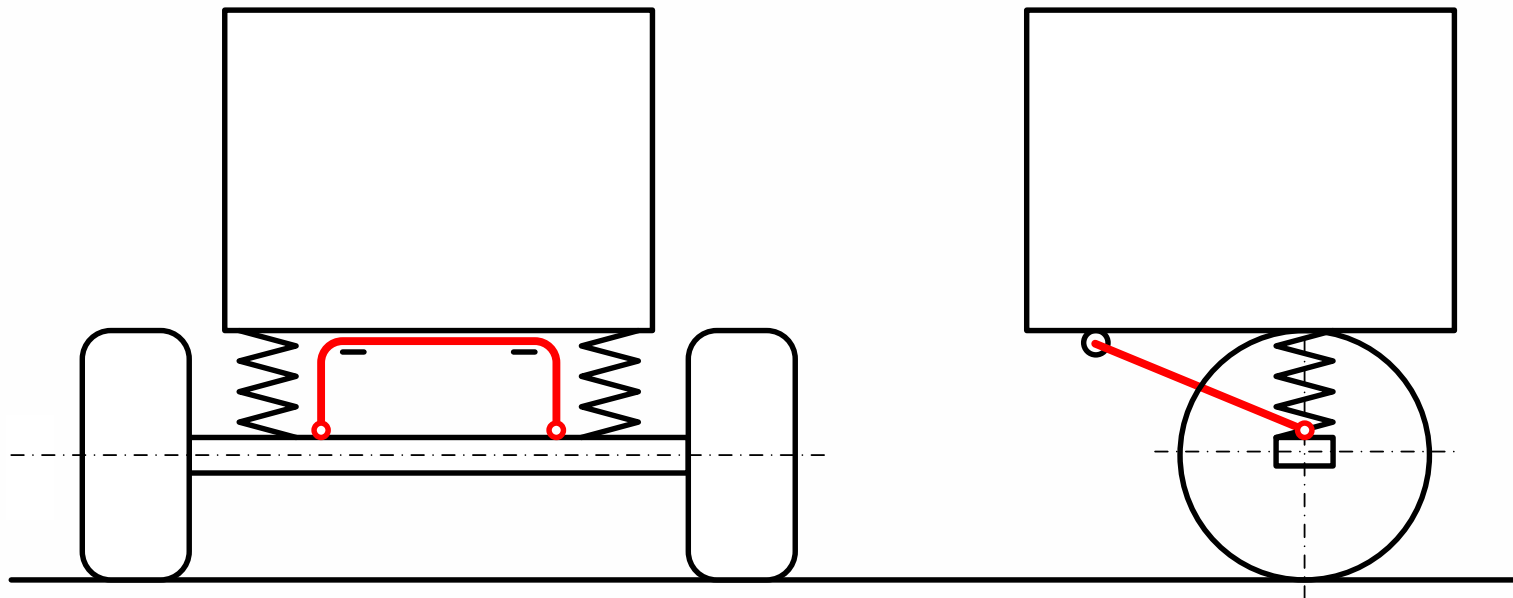
- Vzmetena nadgradnja:



$$h_n^* \approx h_n; b' \neq b'' \neq b/2$$



Prečni stabilizator na premi

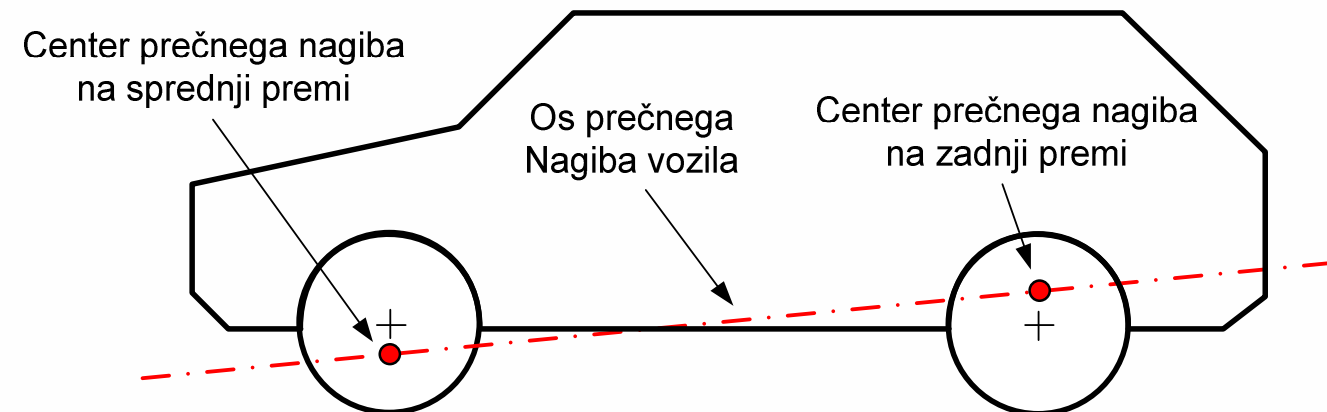


- Proti-zvrtnitvena togost na sprednji premi naj bi bila višja kot proti-zvrtnitvena togost na zadnji premi zato, da se v mejnih pogojih vožnje ohrani pod-krmarjenost vozila.
- Iz tega razloga se prečne stabilizatorje vedno dodaja na sprednjo premo vozila, na zadnjo premo pa le po potrebi.



Prečna rotacija vozila pri bočnem pospešku

- Pri bočnem pospešku (vožnja v ovinek, sunek vetra) se vzmetena nadgradnja vozila nagiba v prečni smeri vzdolž osi vozila v smeri delovanja bočnega pospeška.
- Os, okoli katere se nagiba vozilo je premica, ki povezuje centra vzdolžnih nagibov vozila na posameznih premah vozila:



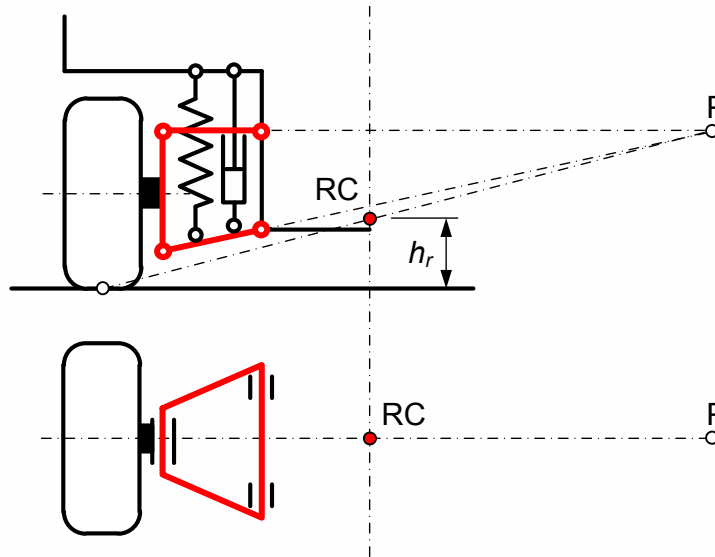
Prečna rotacija vozila pri bočnem pospešku

- Center prečnega nagiba (ang. „roll centre“) na premi vozila je točka, okoli katere se vrti vzmetena nadgradnja vozila pri bočnem pospešku.
- Center prečnega preme nagiba je dinamična točka, ker se spreminja s hodom obešenja.
- Višina centra prečne rotacije h_r predstavlja točko na vzmeteni masi vozila, v kateri deluje reakcija na prečno silo.
- Pri posamičnih obesah pride pri premiku nadgradnje do prečnega zdrsavanja pnevmatik po vožnji površini ob bočnem pospešku, če je center prečne rotacije nad vozno površino.
- Zato se pri posamičnih obesah sledi cilju, da je center prečne rotacije čim bližje vozni površini.

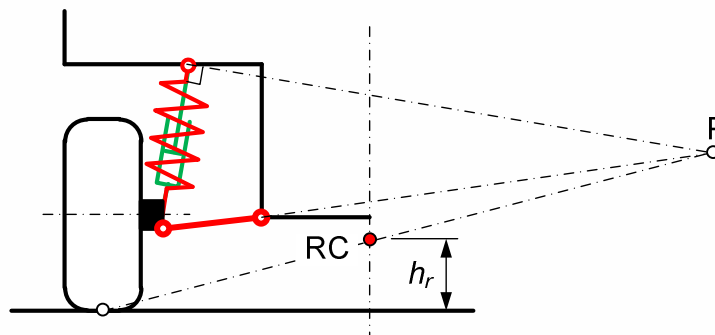


Tipi obešenja na vozilu in center prečne rotacije

- Posamično obešenje koles z dvema prečnima vodiloma:

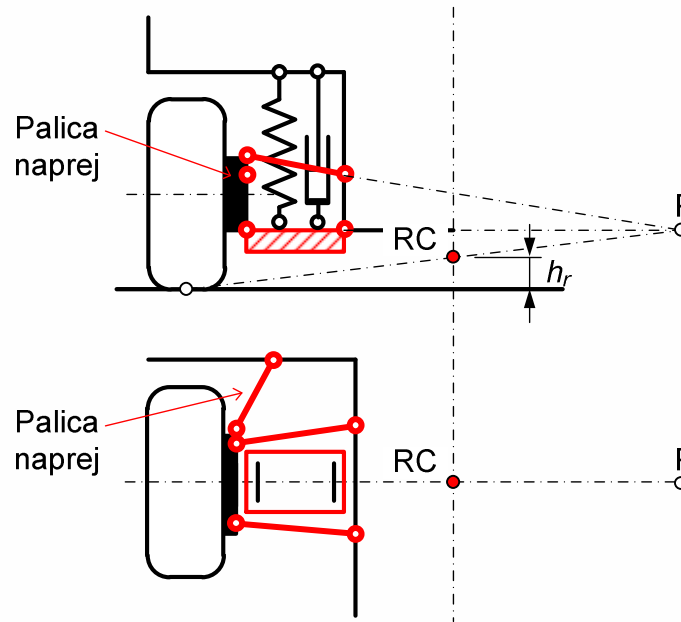


- Posamično obešenje z McPhersonovo vzmetno nogo:

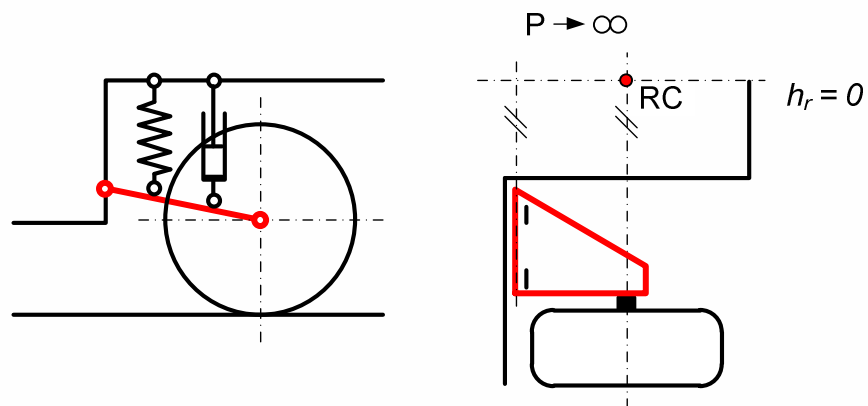


Tipi obešenja na vozilu in center prečne rotacije

- Posamično obešenje z “multi-link” vodilom:

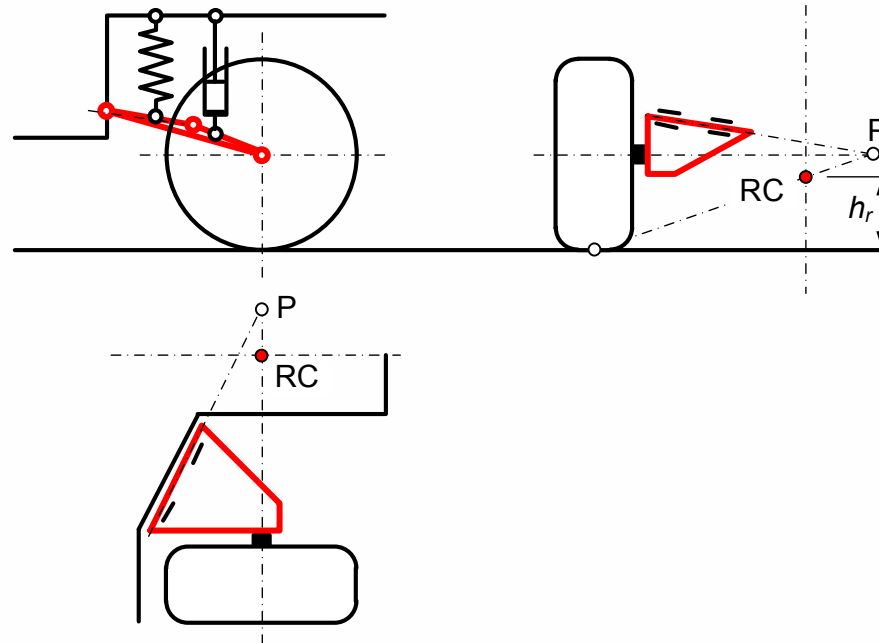


- Posamično obešenje z enojnimi vzdolžnimi vodili:

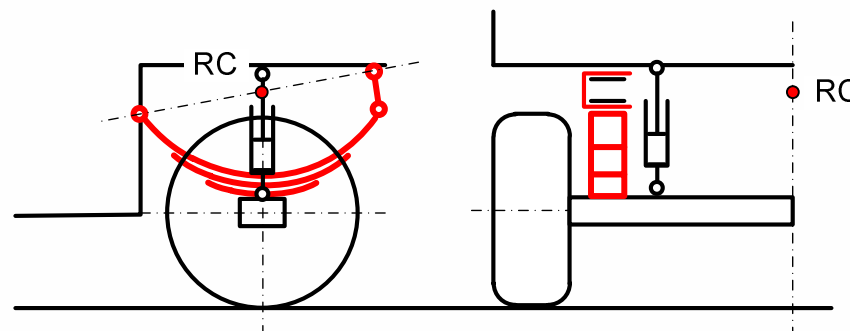


Tipi obešenja na vozilu in center prečne rotacije

- Posamično obeženje s poševnimi (prostorskimi) vodili:

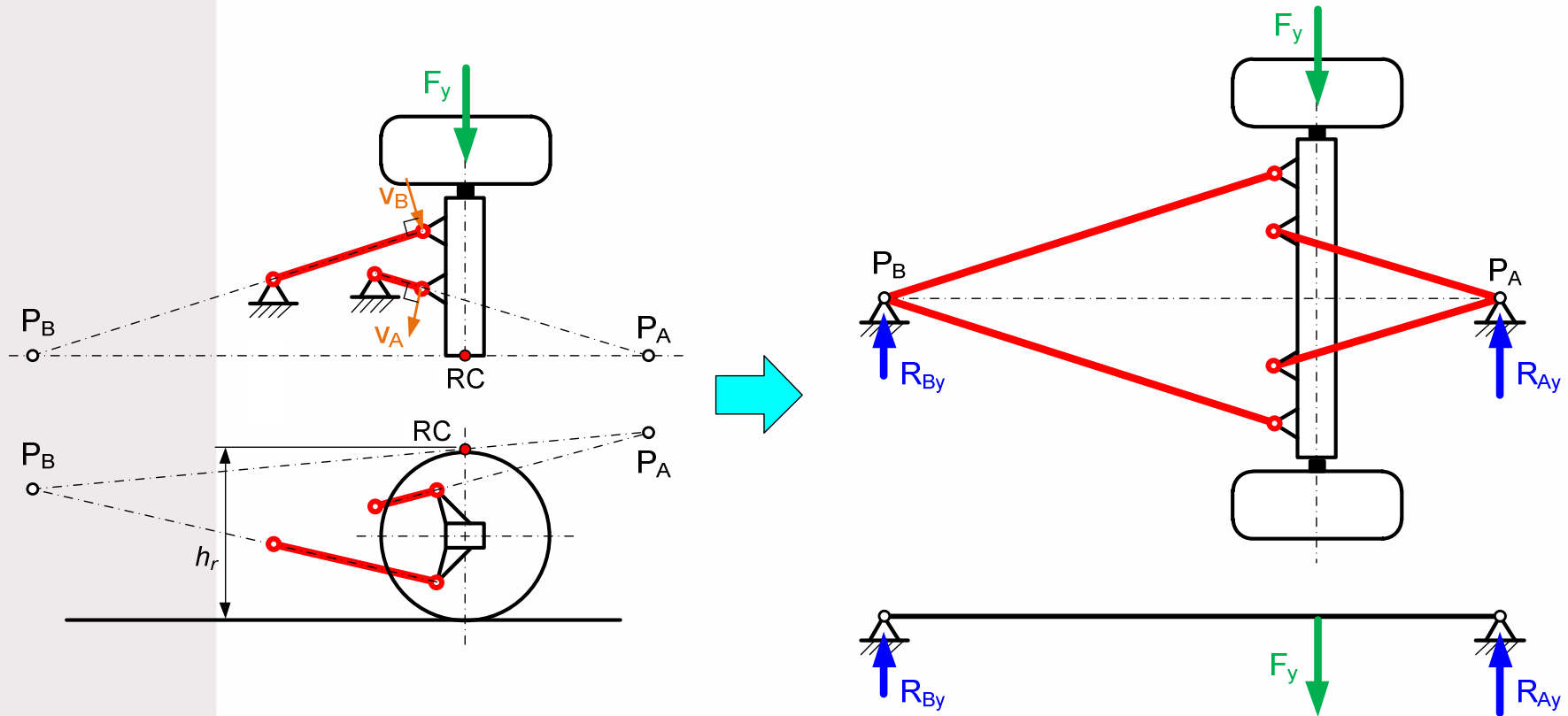


- Toga prema z listnatimi vzmetmi:



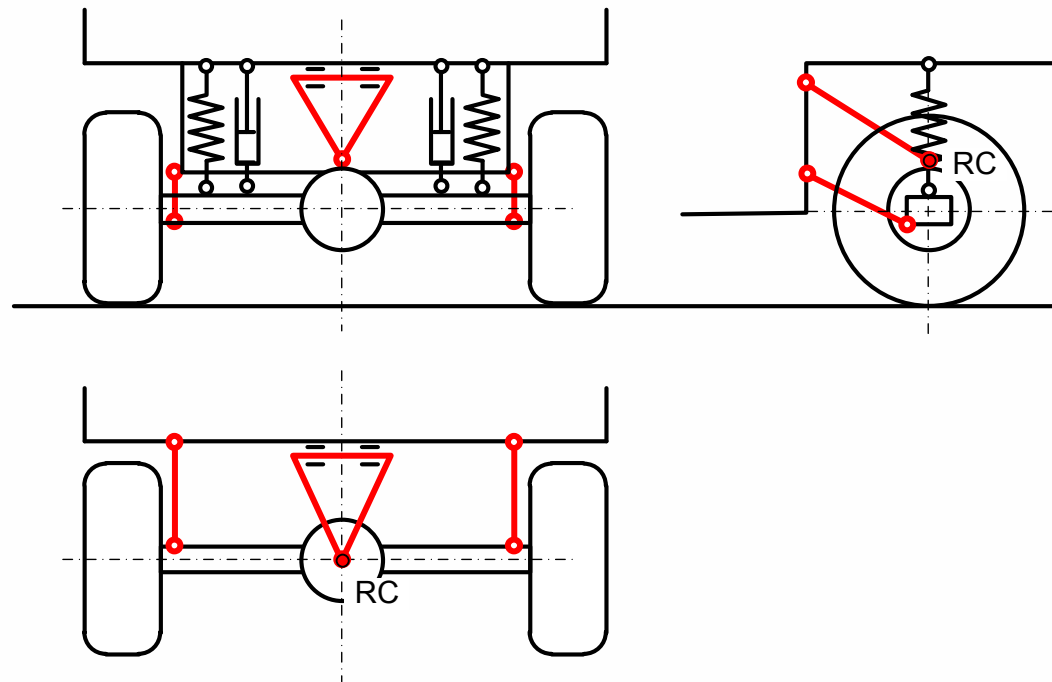
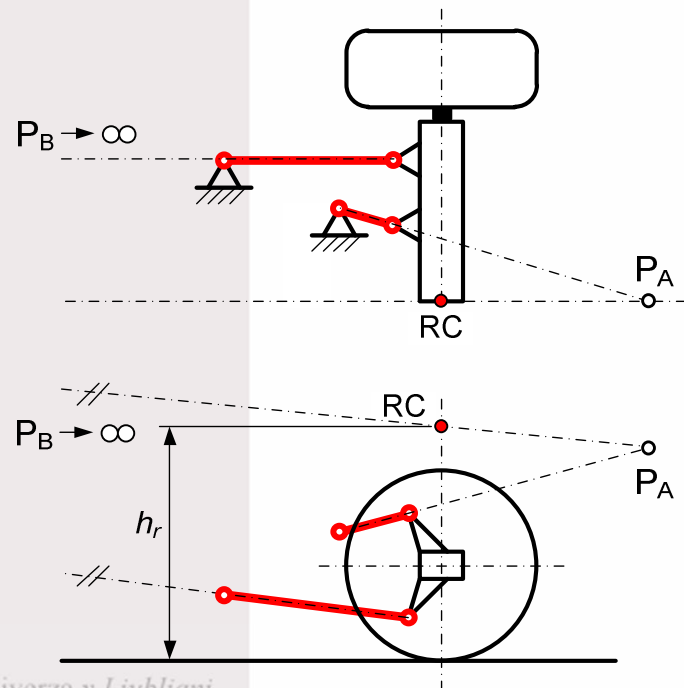
Tipi obeženja na vozilu in center prečne rotacije

- Toga prema s štiri-paličnim vodilom:



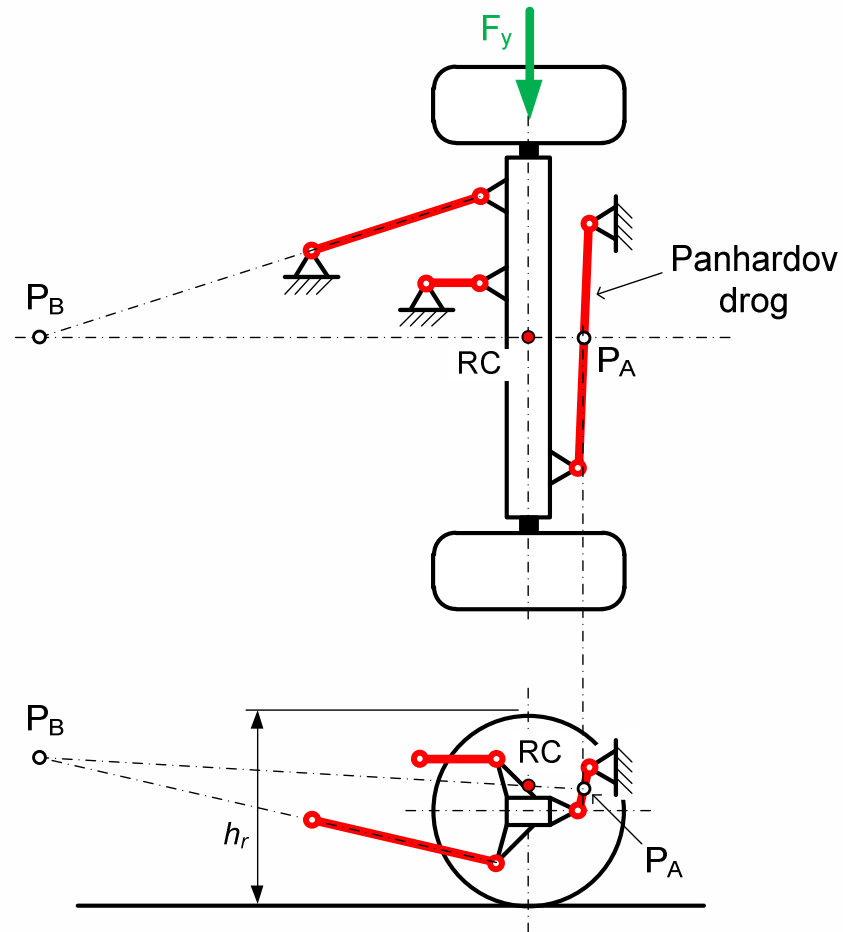
Tipi obešenja na vozilu in center prečne rotacije

- Toga prema s štiri-paličnim vodilom in dvema vzporednima vodiloma (podobno velja tudi za togo premo z dvema vzporednima vodiloma in trikotnim vodilom v obliki črke A – slika desno spodaj):



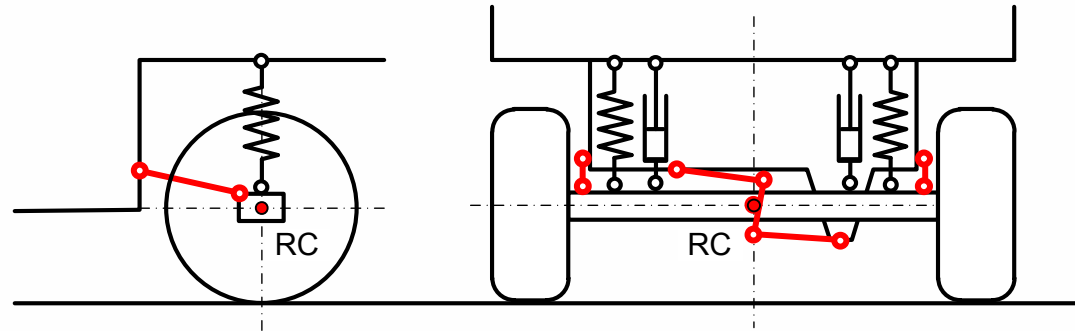
Tipi obešenja na vozilu in center prečne rotacije

- Toga prema s Panhardovim drogom (ki prevzame praktično celotno prečno silo):

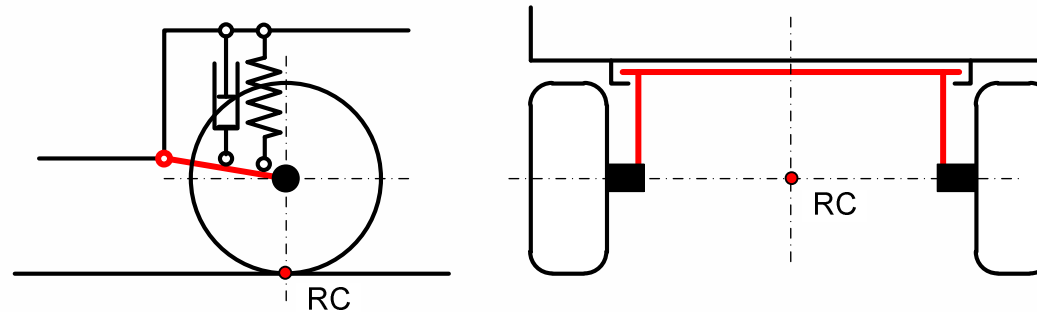


Tipi obešenja na vozilu in center prečne rotacije

- Toga prema z Wattovim mehanizmom :

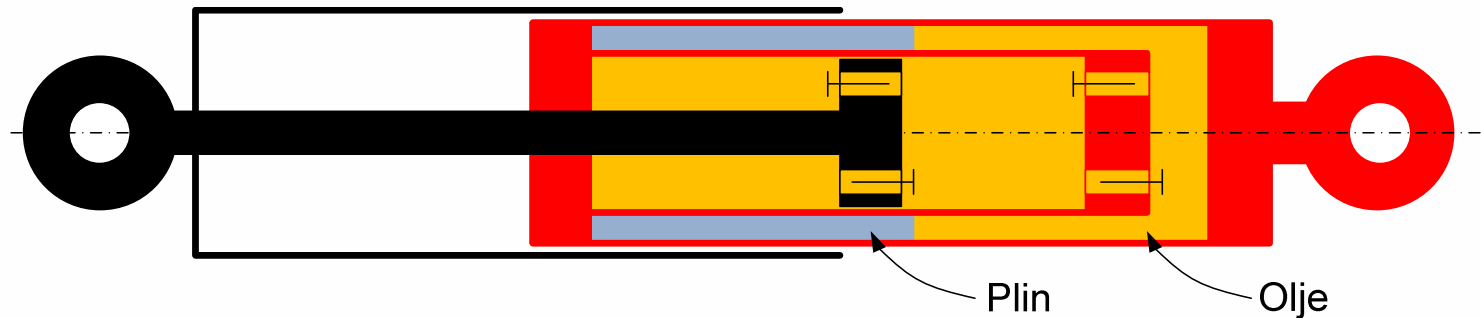


- Poltoga prema z vijačnimi vzmetmi:



Tipi vzmetenja na vozilu – elementi vzmetenja

- Dvocevni oljni blažilnik:

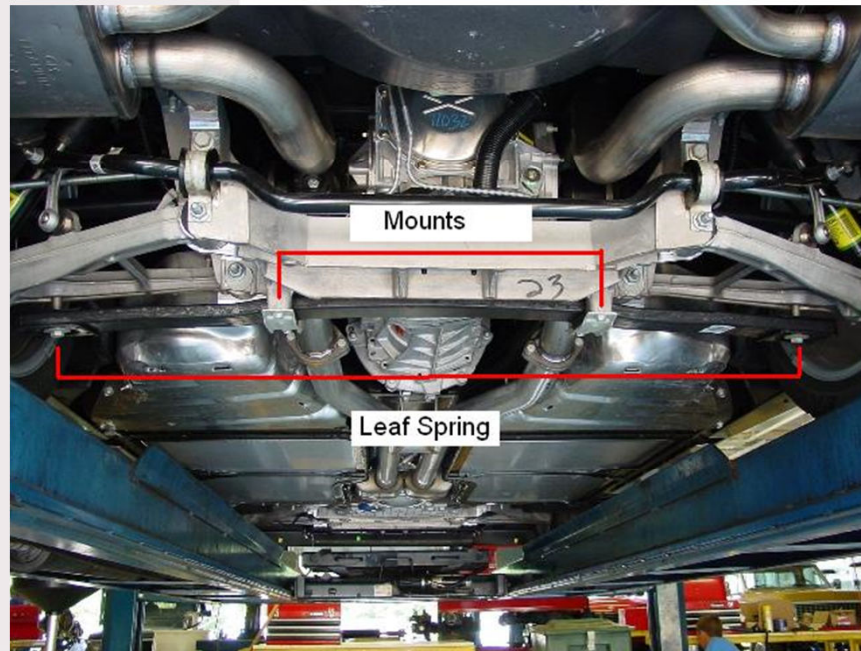


- Jeklene kovinske vzmeti:
 - Paket listnatih upogibnih vzmeti (vozila za gradbeništvo);
 - Torzijska palična vzmet (Renault 4, 5-I);
 - Torzijska vijačna vzmet (prevladujoči tip vzmetenja na modernih vozilih).
- Kompozitna upogibna vzmet (epoxy smola + steklena vlakna) – Chevrolet Corvette.

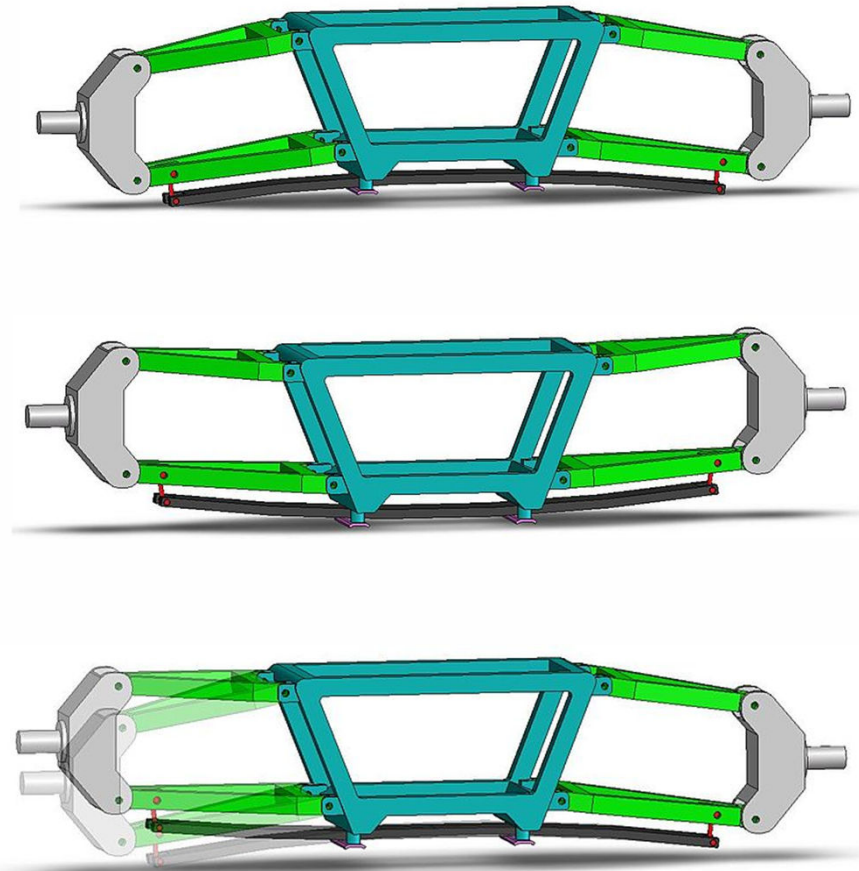


Tipi vzmetenja na vozilu – elementi vzmetenja

- Kompozitna upogibna vzmet vozila Chevroleta Corvette:

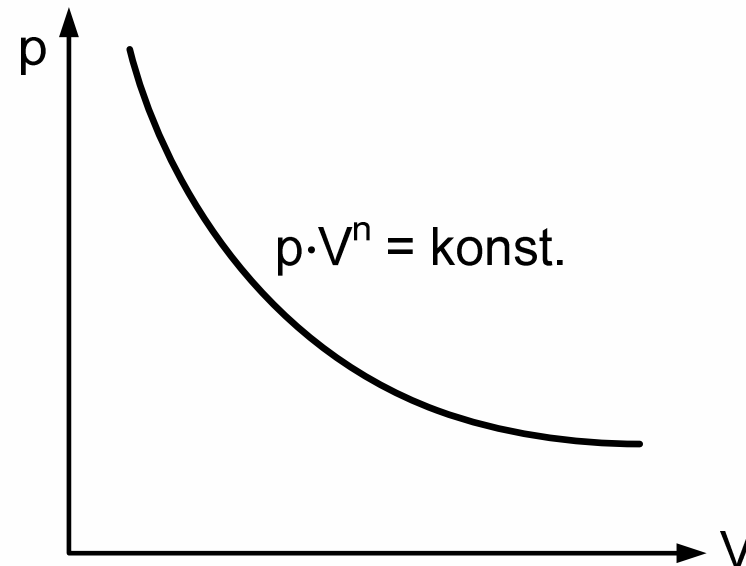
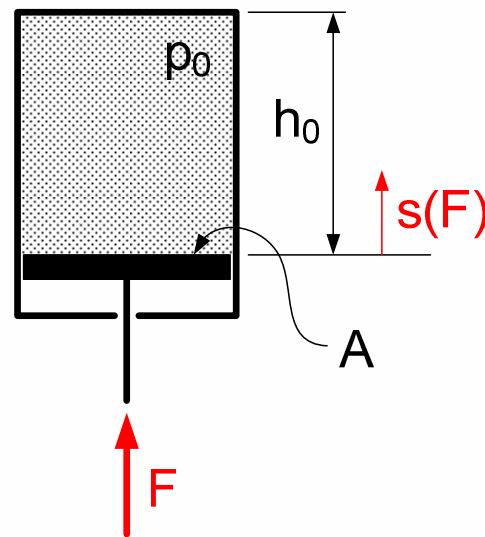


Vir: en.wikipedia.org/wiki/Corvette_leaf_spring



Tipi vzmetenja na vozilu – elementi vzmetenja

- Pnevmatško in hidro-pnevmatško vzmetenje – togostna karakteristika pnevmatske vzmeti:



$n = 1,4 \Rightarrow$ izentropa

$n \approx 1,3 \Rightarrow$ politropa



Tipi vzmetenja na vozilu – elementi vzmetenja

- Pnevmatško in hidro-pnevmatško vzmetenje – togostna karakteristika pnevmatske vzmeti:

$$p_0 \cdot V_0^n = p \cdot V^n$$

$$p_0 \cdot A^n \cdot h_0^n = \frac{F}{A} \cdot A^n \cdot (h_0 - s)^n$$

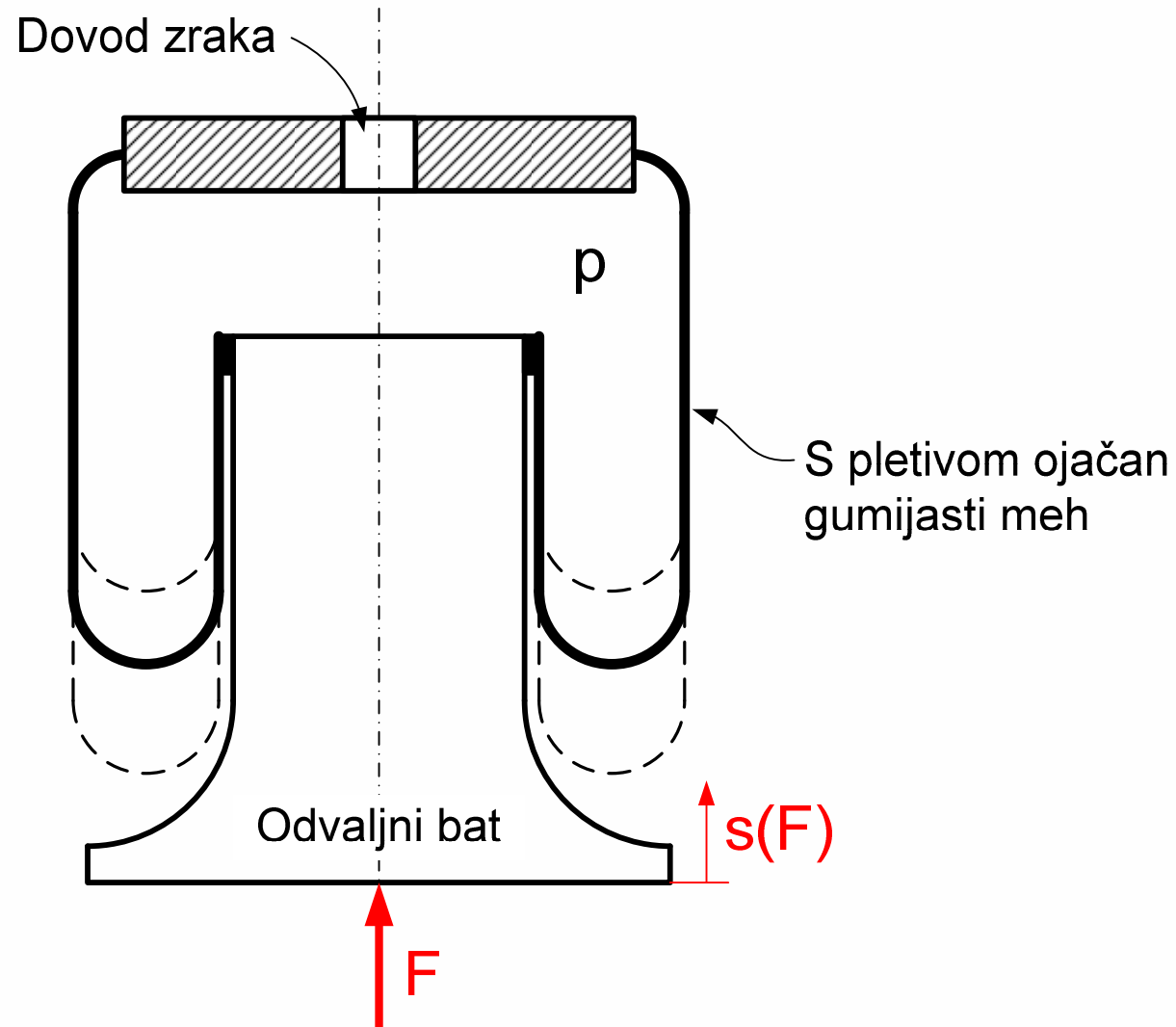
$$F = \frac{p_0 \cdot A \cdot h_0^n}{(h_0 - s)^n}$$

$$c = \frac{dF}{ds} = \frac{n \cdot p_0 \cdot A \cdot h_0^n}{(h_0 - s)^{n+1}}$$



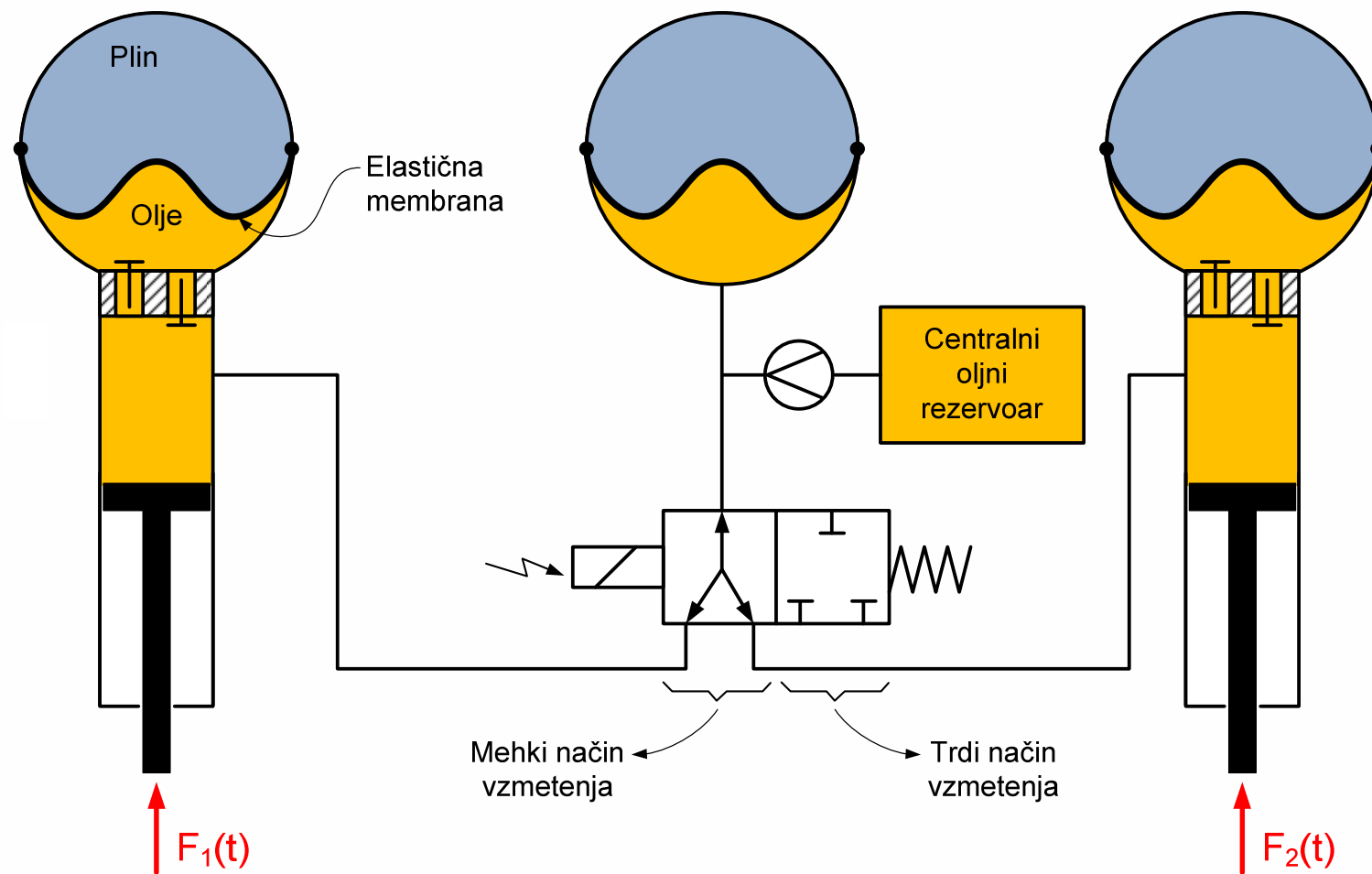
Tipi vzmetenja na vozilu – elementi vzmetenja

- Pnevmatika vzmet z odvaljnim batom:



Tipi vzmetenja na vozilu – elementi vzmetenja

- Citröenov hidro-pnevmatski sistem vzmetenja (ena prema):



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila - pospeševanje

- Pri pospeševanju pride zaradi dinamične prerazporeditve sil do dvigovanja vozila na sprednji premi ter povesa vozila na zadnji premi.
- S pravilno geometrijo obešenja je možno doseči naslednje:
 - Preprečiti dvig vozila na sprednji premi;
 - Preprečiti poves vozila na zadnji premi;
 - Preprečiti zasuk vozila nazaj okoli prečne rotacijske osi.
- Določitev geometrije obešenja vozila izvedemo s pomočjo naslednjih poenostavitev:
 - Naklonski kot strmine (α) je enak nič;
 - Upore pri vožnji vozila (kotalni upor, upor ležajev, zračni upor, upor priklopnika) zanemarimo.



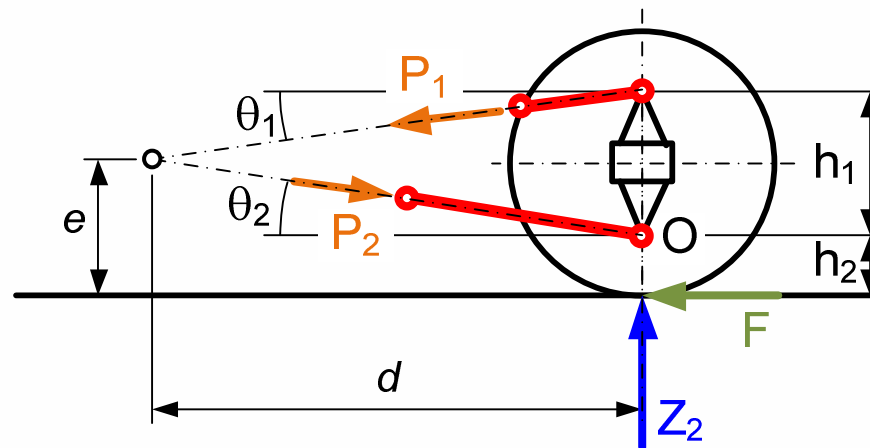
Navpično nihanje vzmetenih delov vozila - pospeševanje

- Ob upoštevanju prej navedenih poenostavitev, sta sili koles na podlago na sprednji in zadnji premi enaki:

$$Z_1 = G \cdot \frac{l''}{l} - \frac{h_n}{l} \cdot F = Z_{1,st} - \frac{h_n}{l} \cdot m \cdot a_x$$

$$Z_2 = G \cdot \frac{l'}{l} + \frac{h_n}{l} \cdot F = Z_{2,st} + \frac{h_n}{l} \cdot m \cdot a_x$$

- Primer 1: pogon 4x2 zadaj s togo zadnjo premo – analiza z ekvivalentno roko obešenja



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila - pospeševanje

- Ravnotežje enačb za togo zadnjo premo s pogonom lahko zapišemo takole:

$$\sum F_x = 0 = F + P_1 \cdot \cos \theta_1 - P_2 \cdot \cos \theta_2$$

$$\sum F_z = 0 = Z_2 - P_1 \cdot \sin \theta_1 - P_2 \cdot \sin \theta_2$$

$$\sum M_O = 0 = F \cdot h_2 - (P_1 \cdot \cos \theta_1) \cdot h_1$$

- Iz tega sistema enačb sledi:

$$P_1 = \frac{F \cdot h_2}{h_1 \cdot \cos \theta_1} \quad P_2 = \frac{F \cdot (1 + h_2/h_1)}{\cos \theta_2}$$

$$Z_2 = F \cdot \frac{h_2}{h_1} \cdot \tan \theta_1 + F \cdot \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right) \cdot \tan \theta_2$$



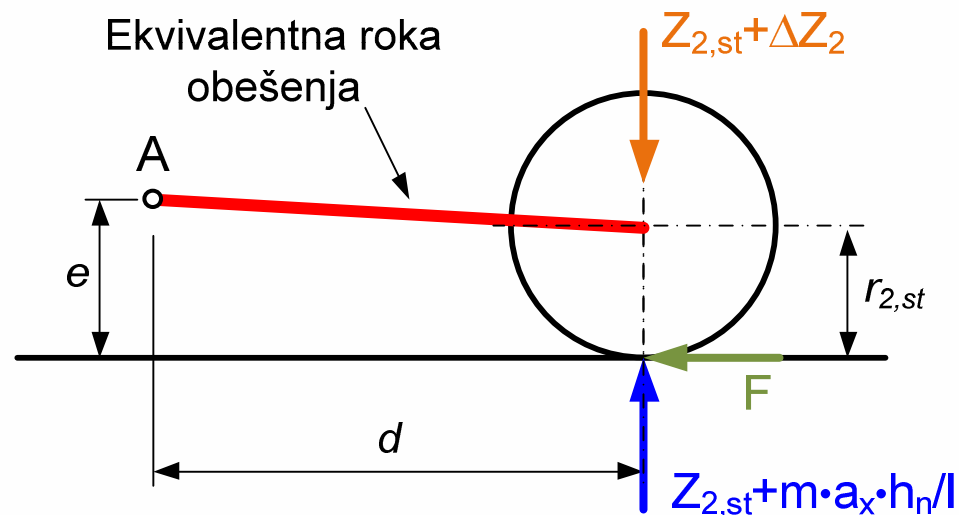
Navpično nihanje vzmetenih delov vozila - pospeševanje

- Ter z upoštevanjem tangensov kotov θ_1 in θ_2 :

$$\tan \theta_1 = \frac{h_1 + h_2 - e}{d} \quad \tan \theta_2 = \frac{e - h_2}{d}$$

$$\frac{Z_2}{F} = \frac{e}{d}$$

- To pomeni, da lahko obravnavani sistem obešenja toge preme nadomestimo z ekvivalentno roko obešenja, ki je togo pritrjena na zadnjo togo premo, ki poganja vozilo:



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila - pospeševanje

- Zapišemo lahko ravnotežno enačbo navorov okoli vrtilišča A:

$$\sum M_A = 0 = Z_{2,st} \cdot d + m \cdot a_x \cdot \frac{h_n}{l} \cdot d - Z_{2,st} \cdot d - \Delta Z_2 \cdot d - F \cdot e$$

- Iz katere dobimo naslednje zveze:

$$\Delta Z_2 = m \cdot a_x \cdot \frac{h_n}{l} - F \cdot \frac{e}{d} = c_2 \cdot s_2$$

$$\Delta Z_1 = -m \cdot a_x \cdot \frac{h_n}{l} = c_1 \cdot s_1$$

- Kjer so:
 - $Z_{2,st}$... statična navpična sila med kolesi zadnje preme in podlago
 - ΔZ ... sprememba navpične sile v vzmetenju
 - s_1 ... povs (skrček je pozitiven) vzmeti na sprednji premi
 - s_2 ... povs (skrček je pozitiven) vzmeti na zadnji premi
 - c_1 ... togost vzmeti na sprednji premi
 - c_2 ... togost vzmeti na zadnji premi



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila - pospeševanje

- Če naj se višina vzmetene nadgradnje vozila na zadnji premi ne povesi navzdol (proti-počep; ang. „*anti-squat*“) potem mora biti vrtilišče ekvivalentne roke obešenja postavljeno tako, da je sila ΔZ_2 enaka nič. To pomeni, da morata višina e vrtilišča A in oddaljenost tega vrtilišča od osi kolesa d izpolniti pogoj:

$$\frac{e}{d} = \frac{h_n}{l}$$

- Če naj se vozilo pri pospeševanju ne zasuka nazaj okoli prečne osi, ki gre skozi težišče nadgradnje, pa mora biti kot zasuka θ_n vzmetene nadgradnje enak nič:

$$\theta_n = \frac{s_2 - s_1}{l} = \frac{1}{l} \cdot \left[\frac{\Delta Z_2}{c_2} - \frac{\Delta Z_1}{c_1} \right] = \frac{1}{l} \cdot m \cdot a_x \cdot \left[\frac{h_n}{c_2 \cdot l} - \frac{e}{c_2 \cdot d} + \frac{h_n}{c_1 \cdot l} \right]$$

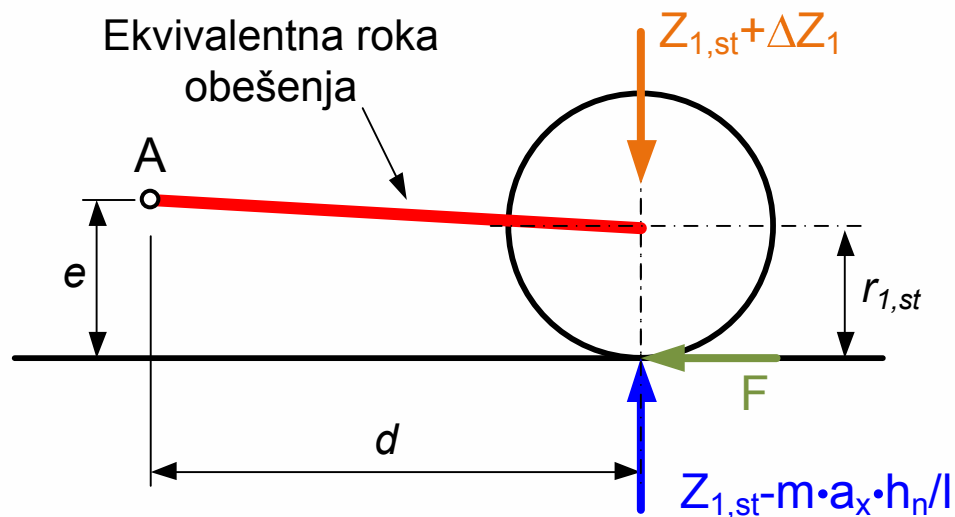
- To se zgodi, če je izpolnjen naslednji pogoj:

$$\frac{e}{d} = \frac{h_n}{l} + \frac{h_n \cdot c_2}{l \cdot c_1}$$



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila - pospeševanje

- V praksi to pomeni, da se geometrijo vzmetenja pogonske zadnje toge preme prilagodi tako, da je razmerje e/d med obema skrajnima vrednostima.
- Posledično pri pospeševanju vozila pride do določenega počepa vzmetene nadgradnje na zadnji premi in do določenega zasuka nadgradnje okoli njenega težišča.
- Primer 2: pogon 4x2 spredaj s togo sprednjo premo



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila - pospeševanje

- Za razliko od pogona zadaj, sedaj dinamična porazdelitev sil povzroča zmanjševanje navpične sile med kolesi in podlago na pogonski premi.
- S podobno izpeljavo kot za pogon zadaj s togo premo sedaj pridemo do naslednjih enačb:

$$\sum M_A = 0 = Z_{1,st} \cdot d - m \cdot a_x \cdot \frac{h_n}{l} \cdot d - Z_{1,st} \cdot d - \Delta Z_1 \cdot d - F \cdot e$$

$$\Delta Z_2 = m \cdot a_x \cdot \frac{h_n}{l} = c_2 \cdot s_2$$

$$\Delta Z_1 = -m \cdot a_x \cdot \frac{h_n}{l} - F \cdot \frac{e}{d} = c_1 \cdot s_1$$

$$\frac{e}{d} = -\frac{h_n}{l}$$



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila - pospeševanje

$$\theta_n = \frac{s_2 - s_1}{l} = \frac{1}{l} \cdot \left[\frac{\Delta Z_2}{c_2} - \frac{\Delta Z_1}{c_1} \right] = \frac{1}{l} \cdot m \cdot a_x \cdot \left[\frac{h_n}{c_2 \cdot l} + \frac{h_n}{c_1 \cdot l} + \frac{e}{c_1 \cdot d} \right]$$

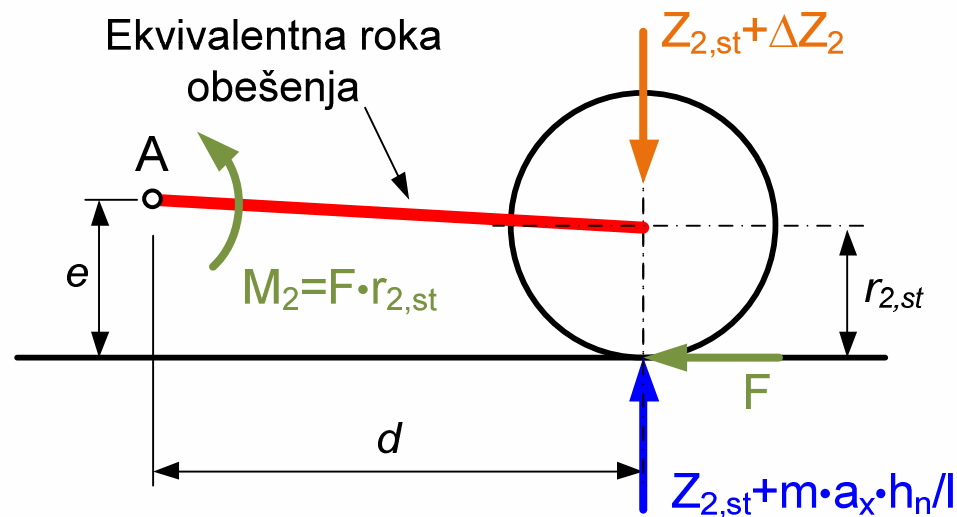
$$\frac{e}{d} = -\frac{h_n}{l} - \frac{h_n \cdot c_1}{l \cdot c_2}$$

- Negativni predznak v enačbah, ki določata mejni vrednosti razmerja e/d pomeni, da mora biti vrtilišče A ekvivalentne roke obešenja v tem primeru za rotacijsko osjo sprednje preme.
- Tudi v tem primeru je geometrija obešenja sprednje preme kompromis med določenim počepom vzmetene nadgradnje na sprednji premi in do določenim zasukom nadgradnje okoli njenega težišča.



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila - pospeševanje

- Primer 3: pogon 4x2 zadaj s posamičnim obešenjem na zadnji premi.
- Pri posamičnem obešenju na zadnji premi je diferencial pritrjen na ohišje. To pomeni, da se reakcija na pogonski navor M_2 prenese direktno na vzmeteno nadgradnjo vozila in jo dodatno obremeni:



- Ta dodatni navor M_2 vpliva na ravnotežje sil obešenja ter posledično spremeni mejne vrednosti razmerja e/d za proti-počep in proti-zasuk.



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila - pospeševanje

$$\sum M_A = 0 = Z_{2,st} \cdot d + m \cdot a_x \cdot \frac{h_n}{l} \cdot d - Z_{2,st} \cdot d - \Delta Z_2 \cdot d - F \cdot (e - r_{2,st})$$

$$\Delta Z_2 = m \cdot a_x \cdot \frac{h_n}{l} - F \cdot \frac{e - r_{2,st}}{d} = c_2 \cdot s_2$$

$$\Delta Z_1 = -m \cdot a_x \cdot \frac{h_n}{l} = c_1 \cdot s_1$$

$$\frac{e - r_{2,st}}{d} = \frac{h_n}{l}$$

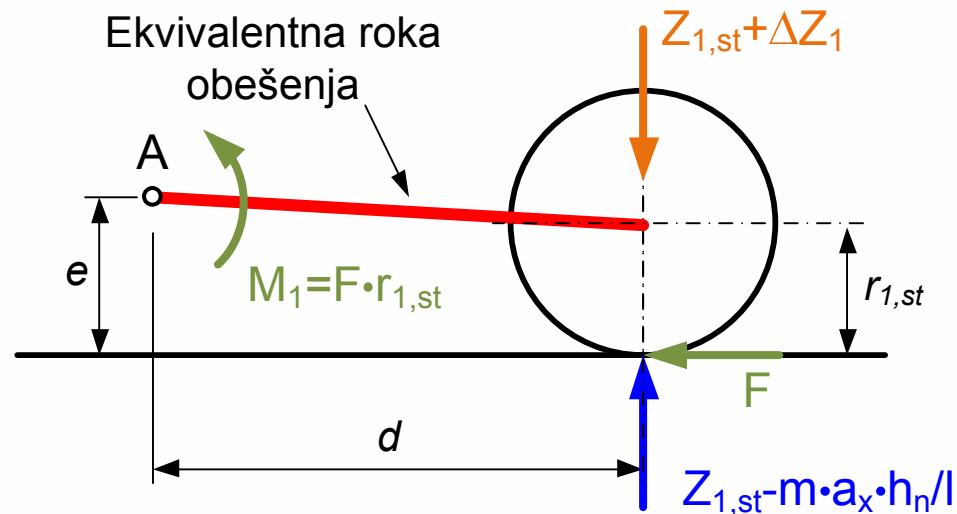
$$\theta_n = \frac{s_2 - s_1}{l} = \frac{1}{l} \cdot \left[\frac{\Delta Z_2}{c_2} - \frac{\Delta Z_1}{c_1} \right] = \frac{1}{l} \cdot m \cdot a_x \cdot \left[\frac{h_n}{c_2 \cdot l} - \frac{e - r_{2,st}}{c_2 \cdot d} + \frac{h_n}{c_1 \cdot l} \right]$$

$$\frac{e - r_{2,st}}{d} = \frac{h_n}{l} + \frac{h_n \cdot c_2}{l \cdot c_1}$$



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila - pospeševanje

- Primer 4: pogon 4x2 spredaj s posamičnim obešenjem na sprednji premi.
- Tudi v tem primeru zaradi namestitve diferencialnega gonila pogonski navor M_1 obremeni vzmeteno nadgradnjo vozila:



$$\frac{e - r_{1,st}}{d} = -\frac{h_n}{l}$$

$$\frac{e - r_{1,st}}{d} = -\frac{h_n}{l} - \frac{h_n \cdot c_1}{l \cdot c_2}$$



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila - pospeševanje

- Primer 5: pogon 4x4 s posamičnim obešenjem obeh premah.
- V tem primeru je geometrija obešenja odvisna od porazdelitve pogonske sile F na sprednjo premo (F_1) in zadnjo premo (F_2).
- Če je ξ delež pogonske sile na sprednji premi, potem lahko zapišemo naslednje enačbe:

$$F_1 = \xi \cdot F = \xi \cdot m \cdot a_x \qquad F_2 = (1 - \xi) \cdot F = (1 - \xi) \cdot m \cdot a_x$$

$$\Delta Z_1 = m \cdot a_x \cdot \frac{h_n}{l} + \xi \cdot F \cdot \frac{e_1 - r_{1,st}}{d_1} = c_1 \cdot s_1$$

$$\Delta Z_2 = m \cdot a_x \cdot \frac{h_n}{l} - (1 - \xi) \cdot F \cdot \frac{e_2 - r_{2,st}}{d_2} = c_2 \cdot s_2$$

$$\theta_n = \frac{s_2 - s_1}{l} = \frac{1}{l} \cdot \left[\frac{\Delta Z_2}{c_2} - \frac{\Delta Z_1}{c_1} \right] = \frac{1}{l} \cdot m \cdot a_x \cdot \left[\frac{h_n}{c_2 \cdot l} - \frac{(1 - \xi) \cdot e_2}{c_2 \cdot d_2} + \frac{h_n}{c_1 \cdot l} + \frac{\xi \cdot e_1}{c_1 \cdot d_1} \right]$$

- Iz katerih nato izračunamo kritična razmerja e/d za sprednjo in zadnjo premo vozila.



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila - zaviranje

- Za razliko od pospeševanja deluje pojemek (negativni pospešek) vozila v nasprotni smeri vožnje.
- Posledica zaviranja je tako dinamična prerazporeditev sil na vozilu, zaradi česar se poveča navpična sila Z_1 med sprednjimi kolesi in podlago ter zmanjša navpična sila Z_2 med zadnjimi kolesi in podlago.
- Ob upoštevanju enakih predpostavk kot pri pospeševanju vozila, lahko za tipične izvedenke obešenja vozila izpeljemo enačbe, s pomočjo katerih lahko preko izbire ustreznih parametrov vplivamo na počep sprednje preme vozila, na dvig zadnje preme vozila ali na zasuk vzmetene nadgradnje okoli težišča v primeru zaviranja vozila.
- Pri tem upoštevamo dejstvo, da so ve veliki večini primerov zavore nameščene na premo vozila, ne na nadgradnjo.

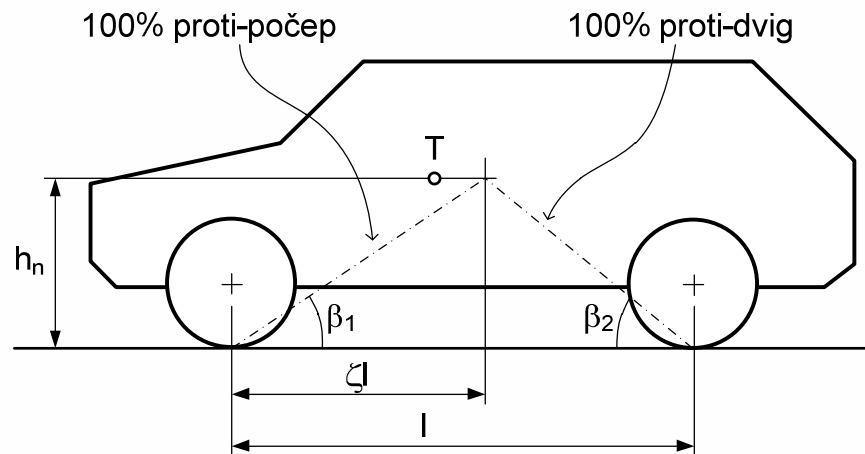


Navpično nihanje vzmetenih delov vozila - zaviranje

- S podobnim sklepanjem kot pri pogonu vozila na obeh premah, lahko izpeljemo geometrijska razmerja za proti-počep nadgradnje na sprednji premi in proti-dvig nadgradnje na zadnji premi:

$$\frac{e_1}{d_1} = \tan \beta_1 = -\frac{h_n}{\zeta \cdot l} \qquad \frac{e_2}{d_2} = \tan \beta_2 = \frac{h_n}{(1-\zeta) \cdot l}$$

- Kjer je ζ delež celotne zavorne sile K na sprednji premi:
 $K_1 = \zeta K$, $K_2 = (1-\zeta)K$.

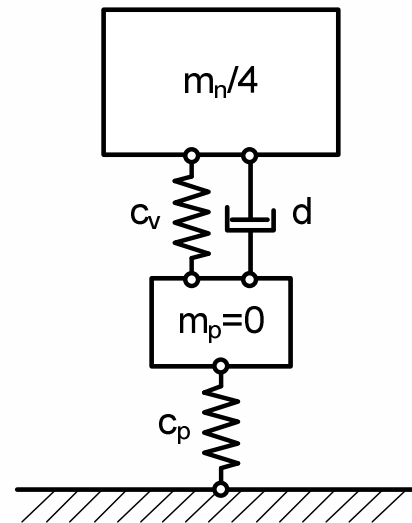


- Končna geometrija obešenja je kompromis proti-počepa, proti-dviga in proti-zasuka pri pospeševanju in zaviranju.



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila

- Navpično nihanje vozila v eni ravnini – dvomasni sistem:
 - Poenostavljene enačbe za izpeljavo nihanja vozila v eni ravnini so izpeljane pod predpostavko, da se masa nevzmetenih delov preme m_p in dušenje amortizerja d zanemari:



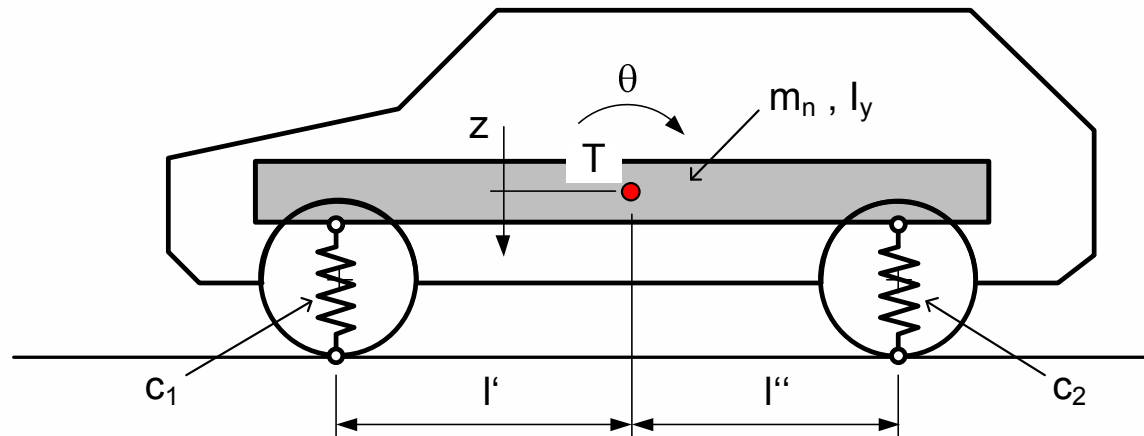
- Nadomestna togost c vzmetenja in pnevmatike je tedaj enaka:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_v} + \frac{1}{c_p} \Rightarrow c = \frac{c_v \cdot c_p}{c_v + c_p}$$



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila

- Poenostavljeni dvo-masni dinamični sistem vozila v eni ravnini:



- Kjer so posamezne veličine:
 - z ... navpični pomik težišča vozila med nihanjem
 - θ ... zasuk nadgradnje okoli težišča vozila med nihanjem
 - c_1 ... nadomestna togost vzmetenja sprednje preme
 - c_2 ... nadomestna togost vzmetenja zadnje preme
 - I_y ... težiščni masni vztrajnostni moment nadgradnje okoli y osi
 - k ... radij giracije (radij, ki za krožečo maso, reducirano v točko, rezultira v enakem masnem vztrajnostne momentu, kot ga ima telo): $k = \sqrt{I_y / m_n}$



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila

- Če definiramo pomožne veličine kot sledi:

$$\alpha = \frac{c_1 + c_2}{m_n}$$

$$\beta = \frac{c_2 \cdot l'' - c_1 \cdot l'}{m_n}$$

$$\gamma = \frac{c_1 \cdot (l')^2 + c_2 \cdot (l'')^2}{m_n \cdot k^2}$$

- Potem lahko zapišemo sistem dveh diferencialnih enačb za nedušeno nihanje vozila v ravnini v naslednji obliki:

$$\ddot{z} + \alpha \cdot z + \beta \cdot \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \beta \cdot \frac{z}{k^2} + \gamma \cdot \theta = 0$$



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila

- Rešitev sistema diferencialnih enačb iščemo v harmoničnem translatorsnem in zasučnem nihanju z enakim faznim zamikom ϕ :

$$z = Z_a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$$

$$\theta = \Theta_a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$$

- Z odvajanjem zgornjih dveh enačb dobimo naslednji zvezi:

$$-Z_a \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) + \alpha \cdot Z_a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) + \beta \cdot \Theta_a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) = 0$$

$$-\Theta_a \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) + \frac{\beta}{k^2} \cdot Z_a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) + \gamma \cdot \Theta_a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) = 0$$

- Od tukaj sledita potrebna pogoja za zgornjo enakost:

$$\frac{Z_a}{\Theta_a} = -\frac{\beta}{\alpha - \omega^2}$$

$$\frac{Z_a}{\Theta_a} = -\frac{k^2 \cdot (\gamma - \omega^2)}{\beta}$$



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila

- S preoblikovanjem teh dveh enačb dobimo novo enačbo, iz katere izračunamo lastne frekvence sklopljenega nihanja:

$$-\frac{\beta}{\alpha - \omega^2} = -\frac{k^2 \cdot (\gamma - \omega^2)}{\beta} \Rightarrow (\alpha - \omega^2) \cdot (\gamma - \omega^2) = \frac{\beta^2}{k^2}$$

$$\omega^4 - (\alpha + \gamma) \cdot \omega^2 + \alpha \cdot \gamma - \frac{\beta^2}{k^2} = 0$$

- Prva in druga lastna frekvenca sklopljenega nihanja sta realni rešitvi zgornje enačbe:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\alpha + \gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha + \gamma)^2}{4} - \left(\alpha \cdot \gamma - \frac{\beta^2}{k^2} \right)} = \frac{\alpha + \gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha - \gamma)^2}{4} - \frac{\beta^2}{k^2}}$$

$$\omega_1 = \left[\frac{\alpha + \gamma}{2} - \sqrt{\frac{(\alpha - \gamma)^2}{4} - \frac{\beta^2}{k^2}} \right]^{1/2}$$

$$\omega_2 = \left[\frac{\alpha + \gamma}{2} + \sqrt{\frac{(\alpha - \gamma)^2}{4} - \frac{\beta^2}{k^2}} \right]^{1/2}$$



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila

- S pomočjo teh dveh lastnih frekvenc dobimo vozlišči sklopljenega nihanja:

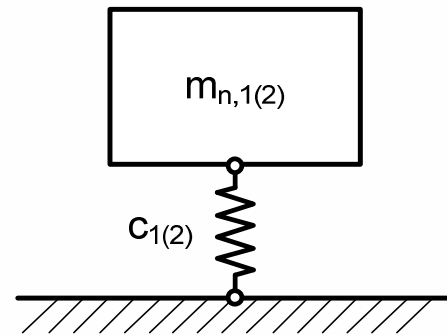
$$\left[\frac{Z_a}{\Theta_a} \right]_{1,2} = -\frac{\beta}{\alpha - \omega_{1,2}^2}$$

- Ko je kvocient Z_a/Θ_a pozitiven, se vozlišče nihanja nahaja na razdalji $x = Z_a/\Theta_a$ pred težiščem, ko pa je ta kvocient negativen, se vozlišče nihanja nahaja za težiščem na razdalji $x = Z_a/\Theta_a$.
- Za tipične masno-togostne značilnosti vozil, bo eno vozlišče nihanja vedno znotraj medosne razdalje vozila, drugo vozlišče pa izven medosne razdalje.
- Vozlišče nihanja znotraj medosne razdalje je tipično povezano s prevladujočim zasučnim nihanjem nadgradnje.
- Vozlišče nihanja zunaj medosne razdalje je povezano s prevladujočim translatorsnim navpičnim nihanjem (poskakovanjem) nadgradnje.



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila

- Položaja vozlišč sklopljenega nihanja sta povezana z lastnimi frekvencami eno-masnega polovičnega modela:

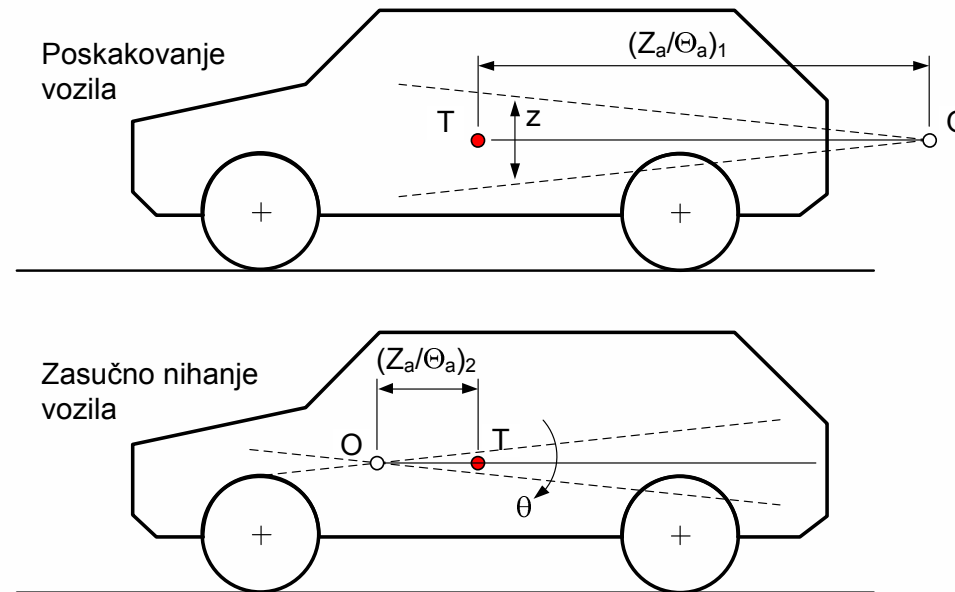


$$\omega_1^{(1D)} = \sqrt{\frac{c_1}{m_{n,1}}} ; \omega_2^{(1D)} = \sqrt{\frac{c_2}{m_{n,2}}}$$

- Tipične masno-togostne značilnosti osebnega vozila so takšne, da je lastna frekvenca sprednje preme nižja od lastne frekvence zadnje preme (c_1 je enaka pribl. $0,7 c_2$).
- Posledično to pomeni, da je:
 - vozlišče sklopljenega nihanja, ki ustreza prevladujočemu zasučnemu nihanju znotraj medosne razdalje pred težiščem vozila;
 - Vozlišče sklopljenega nihanja, ki ustreza prevladujočemu poskakovanju vozila zunaj medosne razdalje za težiščem vozila.



Navpično nihanje vzmetenih delov vozila



- Nadalje velja, da pri tipičnem osebnem vozilu nobena od dveh lastnih nihajnih frekvenc $f_{1,2}^{(1D)}$ ne presega 1,3 Hz. Pri tem hkrati frekvenca poskakovanja ne sme biti več kot za 1,2-krat višja od frekvence sukanja.
- Takšne masno-togostne značilnosti osebnega vozila naj bi zagotavljale najvišje udobje pri vožnji. Seveda imajo športna vozila ustrezno bolj togo vzmetenje, zato za njih zgoraj navedena razmerja med parametri ne veljajo.

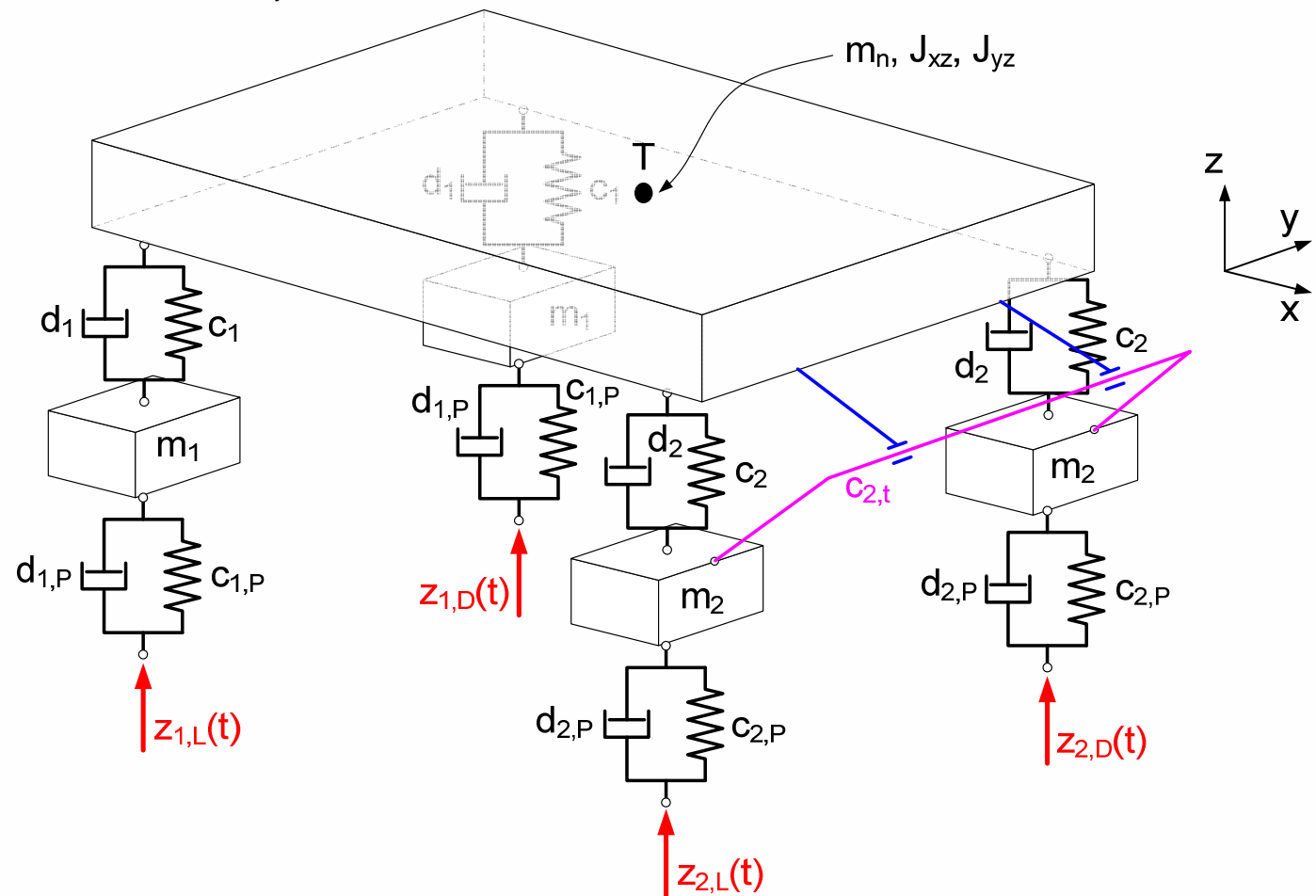


Navpično nihanje vseh delov vozila

■ Vozilo s posamičnimi obesami:

Prostostne stopnje:

- navpični pomiki koles: $z_{k1,L}$, $z_{k1,D}$, $z_{k2,L}$, $z_{k2,D}$
- navpični pomik nadgradnje: z_n
- zasuka nadgradnje: ϕ_{xz} , ϕ_{yz}

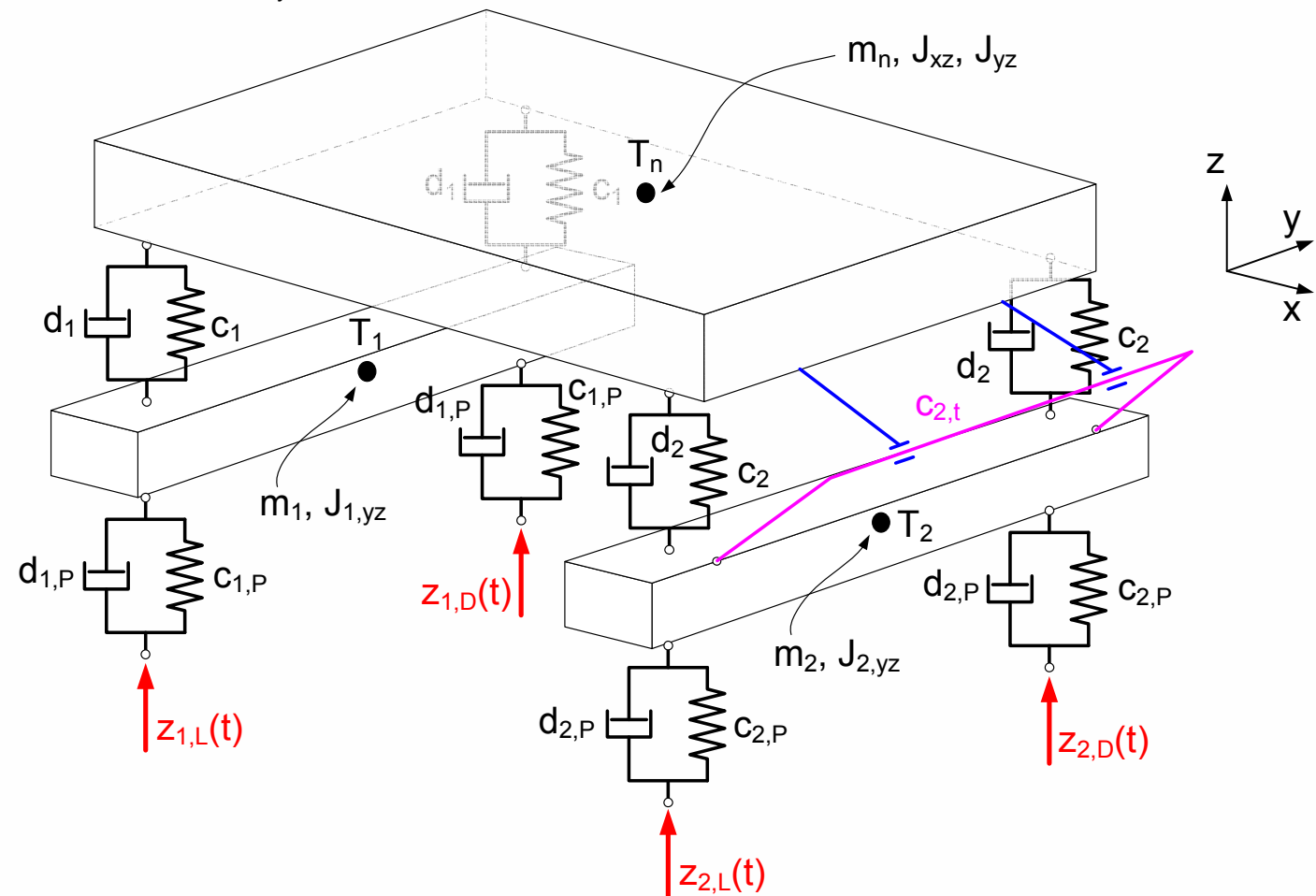


Navpično nihanje vseh delov vozila

■ Vozilo s togo premo:

Prostostne stopnje:

- navpični pomiki in zasuki prem: $z_1, z_2, \phi_{1,yz}, \phi_{2,yz}$
- navpični pomik nadgradnje: z_n
- zasuka nadgradnje: ϕ_{xz}, ϕ_{yz}

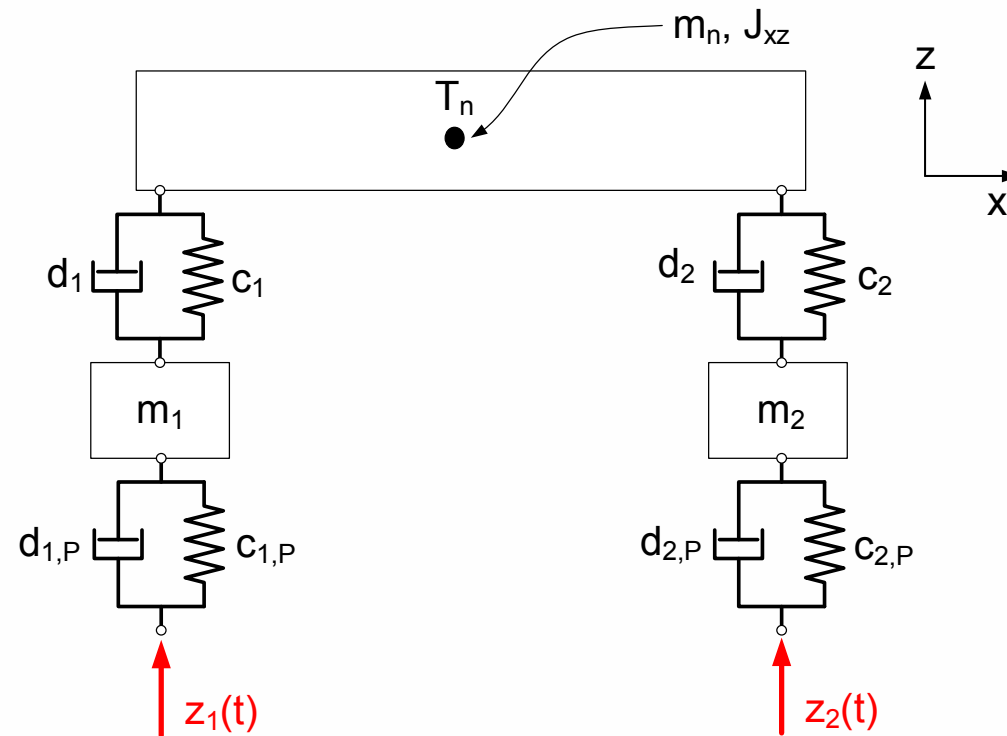


Navpično nihanje vseh delov vozila

■ Ravninski model vozila (štiri-masni dinamični sistem):

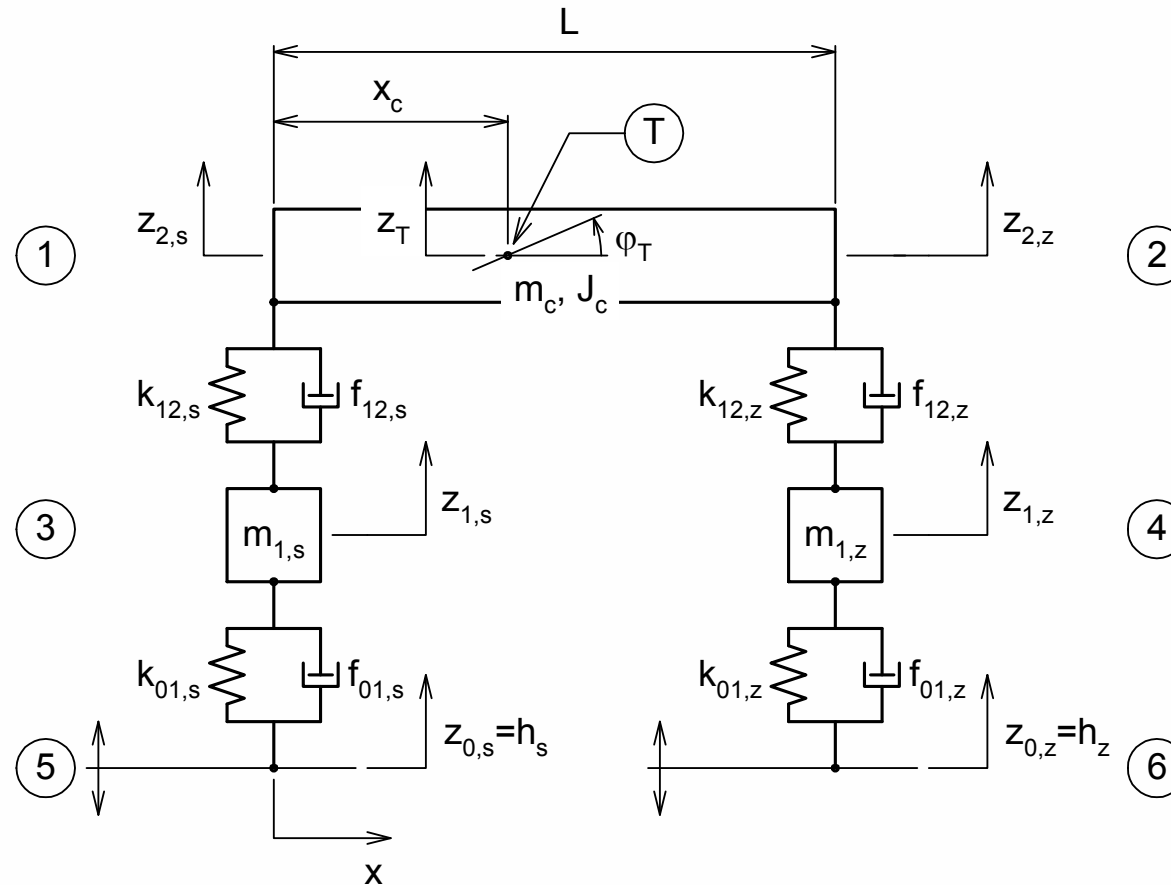
Prostostne stopnje:

- navpična pomika prem: z_{k1}, z_{k2}
- navpični pomik in zasuk nadgradnje: z_n, ϕ_{xz}



Navpično nihanje vseh delov vozila

- Primer izpeljave gibalnih za ravninski model vozila:



Navpično nihanje vseh delov vozila

■ Predpostavke:

$$z_{2,s} > z_{1,s} > h_s$$

$$z_{2,z} > z_{1,z} > h_z$$

$$z_{2,z} > z_{2,s}$$

$$\dot{z}_{2,s} > \dot{z}_{1,s} > \dot{h}_s$$

$$\dot{z}_{2,z} > \dot{z}_{1,z} > \dot{h}_z$$

$$z_T = z_{2,s} \cdot \left(1 - \frac{x_c}{L}\right) + z_{2,z} \cdot \frac{x_c}{L}$$

$$\varphi_T \approx \tan \varphi_T = \frac{z_{2,z} - z_{2,s}}{L}$$

$$z_{2,s} = z_T - \varphi_T \cdot x_c$$

$$z_{2,z} = z_T + \varphi_T \cdot (L - x_c)$$



Navpično nihanje vseh delov vozila

■ Gibalne enačbe:

$$m_{1,s} \cdot \ddot{z}_{1,s} = k_{12,s} (z_T - \varphi_T \cdot x_c - z_{1,s}) + f_{12,s} (\dot{z}_T - \dot{\varphi}_T \cdot x_c - \dot{z}_{1,s}) - \\ - k_{01,s} (z_{1,s} - h_s) - f_{01,s} (\dot{z}_{1,s} - \dot{h}_s) + F_{01,s} - F_{12,s} - m_{1,s} \cdot g$$

$$m_{1,z} \cdot \ddot{z}_{1,z} = k_{12,z} (z_T + \varphi_T (L - x_c) - z_{1,z}) + f_{12,z} (\dot{z}_T + \dot{\varphi}_T (L - x_c) - \dot{z}_{1,z}) - \\ - k_{01,z} (z_{1,z} - h_z) - f_{01,z} (\dot{z}_{1,z} - \dot{h}_z) + F_{01,z} - F_{12,z} - m_{1,z} \cdot g$$

$$m_c \cdot \ddot{z}_T = -k_{12,s} (z_T - \varphi_T \cdot x_c - z_{1,s}) - f_{12,s} (\dot{z}_T - \dot{\varphi}_T \cdot x_c - \dot{z}_{1,s}) - \\ - k_{12,z} (z_T + \varphi_T (L - x_c) - z_{1,z}) - f_{12,z} (\dot{z}_T + \dot{\varphi}_T (L - x_c) - \dot{z}_{1,z}) + \\ + F_{12,s} + F_{12,z} - m_c \cdot g$$

$$J_c \cdot \ddot{\varphi}_T = [k_{12,s} (z_T - \varphi_T \cdot x_c - z_{1,s}) + f_{12,s} (\dot{z}_T - \dot{\varphi}_T \cdot x_c - \dot{z}_{1,s})] \cdot x_c - \\ - [k_{12,z} (z_T + \varphi_T (L - x_c) - z_{1,z}) + f_{12,z} (\dot{z}_T + \dot{\varphi}_T (L - x_c) - \dot{z}_{1,z})] \cdot (L - x_c) - \\ - F_{12,s} \cdot x_c + F_{12,z} (L - x_c)$$



Navpično nihanje vseh delov vozila

- Postavitev sistema diferencialnih enačb 1. stopnje za lokalne koordinatne sisteme (*) in matrični zapis tega sistema enačb:

$$z_{1,s} = y_1 + z_1^* \Rightarrow \dot{y}_1 = \dot{z}_{1,s}, \ddot{y}_1 = \ddot{z}_{1,s} \quad y_5 = \dot{y}_1$$

$$z_{1,z} = y_2 + z_2^* \Rightarrow \dot{y}_2 = \dot{z}_{1,z}, \ddot{y}_2 = \ddot{z}_{1,z} \quad y_6 = \dot{y}_2$$

$$z_T = y_3 + z_3^* \Rightarrow \dot{y}_3 = \dot{z}_T, \ddot{y}_3 = \ddot{z}_T \quad y_7 = \dot{y}_3$$

$$\varphi_T = y_4 + z_4^* \Rightarrow \dot{y}_4 = \dot{\varphi}_T, \ddot{y}_4 = \ddot{\varphi}_T \quad y_8 = \dot{y}_4$$

$$z_{0,s} = h_s = y' + z' \Rightarrow \dot{y}' = \dot{h}_s$$

$$z_{0,z} = h_z = y'' + z'' \Rightarrow \dot{y}'' = \dot{h}_z$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}_G + \mathbf{u}_F + \mathbf{u}_P + \mathbf{u}_K$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)^T$$

$$\dot{\mathbf{y}} = (\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3, \dot{y}_4, \dot{y}_5, \dot{y}_6, \dot{y}_7, \dot{y}_8)^T$$



Navpično nihanje vseh delov vozila

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} , \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{K} , \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (-k_{12,s} - k_{01,s})/m_{1,s} , & 0 , & k_{12,s}/m_{1,s} , & -k_{12,s}x_c/m_{1,s} \\ 0 , & (-k_{12,z} - k_{01,z})/m_{1,z} , & k_{12,z}/m_{1,z} , & -k_{12,z}(L - x_c)/m_{1,z} \\ k_{12,s}/m_c , & k_{12,z}/m_c , & (-k_{12,s} - k_{12,z})/m_c , & (k_{12,s}x_c - k_{12,z}(L - x_c))/m_c \\ -k_{12,s}x_c/J_c , & k_{12,z}(L - x_c)/J_c , & (k_{12,s}x_c - k_{12,z}(L - x_c))/J_c , & (-k_{12,s}x_c^2 - k_{12,z}(L - x_c)^2)/J_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} (-f_{12,s} - f_{01,s})/m_{1,s} , & 0 , & f_{12,s}/m_{1,s} , & -f_{12,s}x_c/m_{1,s} \\ 0 , & (-f_{12,z} - f_{01,z})/m_{1,z} , & f_{12,z}/m_{1,z} , & -f_{12,z}(L - x_c)/m_{1,z} \\ f_{12,s}/m_c , & f_{12,z}/m_c , & (-f_{12,s} - f_{12,z})/m_c , & (f_{12,s}x_c - f_{12,z}(L - x_c))/m_c \\ -f_{12,s}x_c/J_c , & f_{12,z}(L - x_c)/J_c , & (f_{12,s}x_c - f_{12,z}(L - x_c))/J_c , & (-f_{12,s}x_c^2 - f_{12,z}(L - x_c)^2)/J_c \end{bmatrix}$$

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za strojništvo



$$\mathbf{u}_G = (0, 0, 0, 0, -g, -g, -g, 0)^T$$

Katedra za strojne elemente
in razvojna vrednotenja

Navpično nihanje vseh delov vozila

$$\mathbf{u}_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (F_{01,s} - F_{12,s})/m_{1,s} \\ (F_{01,z} - F_{12,z})/m_{1,z} \\ (F_{12,s} + F_{12,z})/m_c \\ (F_{12,z} \cdot (L - x_c) - F_{12,s} \cdot x_c)/J_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ [k_{01,s} \cdot y' + f_{01,s} \cdot \dot{y}']/m_{1,s} \\ [k_{01,z} \cdot y'' + f_{01,z} \cdot \dot{y}'']/m_{1,s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_K = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ [k_{12,s} \cdot (-z_1^* + z_3^* - z_4^* \cdot x_c) + k_{01,s} \cdot (z' - z_1^*)]/m_{1,s} \\ [k_{12,z} \cdot (-z_2^* + z_3^* + z_4^* \cdot (L - x_c)) + k_{01,z} \cdot (z'' - z_2^*)]/m_{1,z} \\ [k_{12,s} \cdot (z_1^* - z_3^* + z_4^* \cdot x_c) + k_{12,z} \cdot (z_2^* - z_3^* - z_4^* \cdot (L - x_c))]/m_c \\ [k_{12,s} \cdot (z_1^* - z_3^* + z_4^* \cdot x_c) \cdot x_c - k_{12,z} \cdot (z_2^* - z_3^* - z_4^* \cdot (L - x_c)) \cdot (L - x_c)]/J_c \end{bmatrix}$$



Navpično nihanje vseh delov vozila

- Reševanje sistema diferencialnih enačb z implicitnim odvajanjem po Eulerju:

$$\dot{\mathbf{y}}(n+1) = \frac{\mathbf{y}(n+1) - \mathbf{y}(n)}{t(n+1) - t(n)}$$

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{y}(n) + (t(n+1) - t(n)) \cdot \dot{\mathbf{y}}(n+1)$$

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{y}(n) + (t(n+1) - t(n)) \cdot [\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(n+1) + \mathbf{u}_G(n+1) + \mathbf{u}_F(n+1) + \mathbf{u}_P(n+1) + \mathbf{u}_K(n+1)]$$

